

- Calculatrices interdites.
- Toute A.N. sans **unité** ne comptera aucun point, et dégradera l'humeur du correcteur.
- Vérifiez l'**homogénéité** de vos relations.
- Encadrez vos résultats et soignez votre copie.

I Mise en orbite d'un satellite

Cette partie s'intéresse à la mise en orbite d'un satellite.

1 Étude du mouvement du satellite

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km et de centre O.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t . L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4,0 \cdot 10^3$ kg est plane et se fait dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) représenté sur la figure 2.

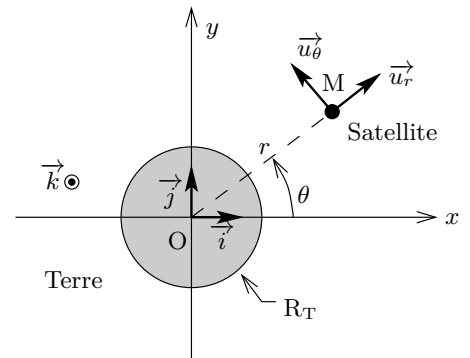


Figure 2

On rappelle que $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$ où $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

1.1 Préliminaires

- 1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$. Déterminer l'expression du vecteur position \vec{OM} et du vecteur vitesse \vec{v}_M dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ en fonction de r , θ et de leurs dérivées éventuelles.
- 2) On note $g_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle \vec{F} s'exprime sous la forme $\mathcal{E}_p(r) = -g_0 m \frac{R_T^2}{r}$. En déduire l'expression de l'interaction \vec{F} exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0 , m , R_T et r . L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à \vec{F} .
- 3) Soit $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_M$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite? Déterminer son expression dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de r , $\dot{\theta}$ et m . Montrer que le vecteur \vec{L}_0 est constant au cours du mouvement.

1.2 Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- ★ phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- ★ phase de satellisation : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

- 4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse \vec{v}_M et le vecteur accélération \vec{a}_M du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$, de sa dérivée temporelle \dot{v} et de r .
- 5) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0 , R_T et r .
- 6) En déduire l'expression des énergies cinétique \mathcal{E}_c et mécanique \mathcal{E}_m du satellite en fonction de m , g_0 , R_T et r . Justifier le signe de \mathcal{E}_m .
- 7) Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km. Rappel : $64 = 2^6$.

1.3 Étude énergétique du satellite

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

- 8) Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0m\frac{R_T^2}{r}.$$

- 9) On appelle énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$. Expliquer ce résultat.

- 10) Le graphe de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

- a) À quelle énergie \mathcal{E}_{m1} ou \mathcal{E}_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ?

- b) Pour quelle valeur particulière de \mathcal{E}_m la trajectoire est-elle circulaire ?

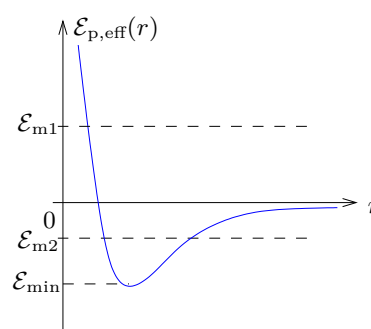


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

1.4 Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une *trajectoire circulaire basse* ($r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km) puis, dans un deuxième temps, sur une *trajectoire circulaire haute* ($r_h = 40 \cdot 10^3$ km) comme illustré sur la figure 4.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périhélie P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

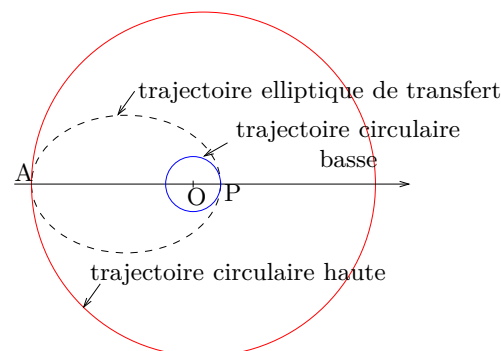


Figure 4

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

- 11) Que peut-on dire des valeurs de \dot{r} lorsque le satellite est en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?
- 12) Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2 + \alpha r + \beta = 0$. Exprimer α et β en fonction de m , L_0 , \mathcal{E}_m , g_0 et R_T .
- 13) En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $\mathcal{E}_{m,t} = -\frac{g_0 m R_T^2}{2a}$.
- 14) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

- 15) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km. De même relever la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km.
- 16) En déduire la variation d'énergie mécanique $\Delta \mathcal{E}_{mP}$ à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ $50 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.
- 17) Connaissez vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle-t-on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

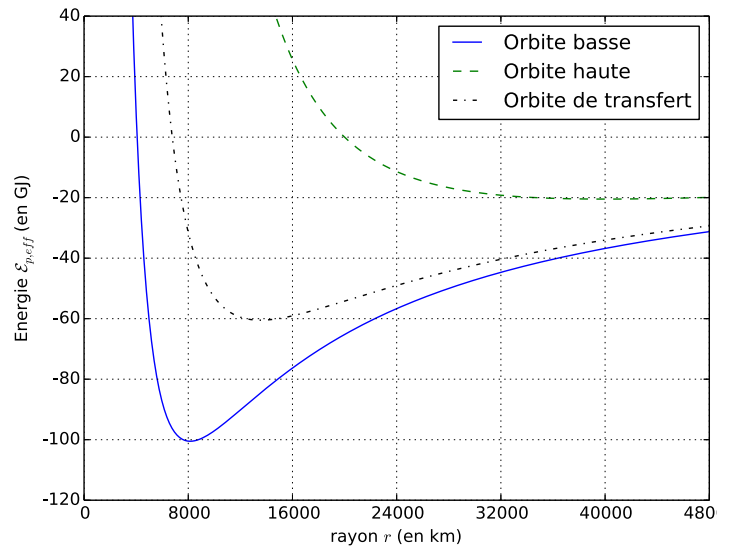


Figure 5 - $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ pour les 3 orbites

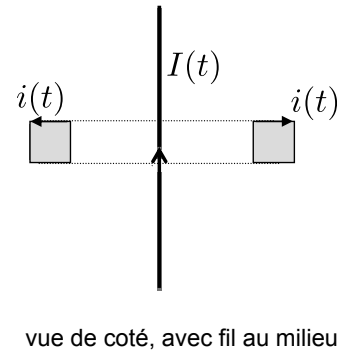
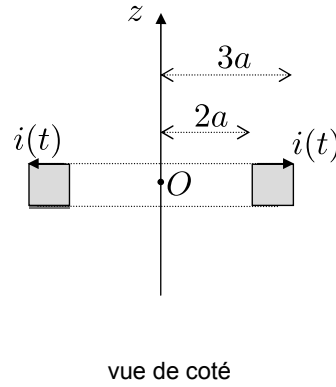
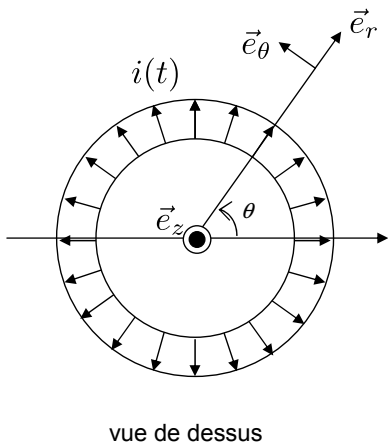
II Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique sert à mesurer des courants sans intervenir physiquement sur le circuit. Il suffit en effet que la pince entoure le fil sur lequel on réalise la mesure pour qu'elle affiche l'intensité qui parcourt le fil.

On propose ici d'en comprendre le mécanisme, qui est basé sur des phénomènes d'induction.



Une pince ampèremétrique à induction peut être décrite comme un tore de section carré, de côté a et d'axe Oz (figure ci-dessous à gauche et au milieu), sur lequel est bobiné un fil, réalisant ainsi N spires carrées de côté a disposées en série. Ce circuit est de résistance totale R . Il est branché en série sur un ampèremètre interne à la pince (non représenté ci-dessous) qui permet d'en mesurer le courant $i(t)$. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz .



Le schéma de droite représente la situation considérée dans la suite, où la pince est disposée autour d'un fil parcouru par le courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, dont on souhaite mesurer la valeur.

Ce fil enserré par la pince est modélisé comme étant infini, de section nulle, confondu avec l'axe Oz . Il est alors possible de montrer que ce fil produit un champ magnétique dont l'expression est

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

- 18 - Expliquer brièvement pourquoi (à cause de quel phénomène physique) il va y avoir présence d'un courant $i(t)$ dans le bobinage de la pince.
- 19 - On considère une spire carrée de la pince. La surface s'appuyant sur cette spire est orientée par le courant $i(t)$. D'après les schémas, selon quel vecteur de la base ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) est dirigée la normale \vec{n} à cette surface ?

Le courant $i(t)$ produit lui aussi un champ magnétique \vec{B}_{propre} . Le flux du champ magnétique total $\vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{propre}}$ à travers les N spires carrées de la pince est donné par

$$\Phi = \frac{\mu_0 (NI(t) + N^2 i(t))}{2\pi} a \ln \frac{3}{2}.$$

- 20 - À partir de l'expression de Φ ci-dessus, en déduire l'expression du coefficient d'inductance propre L de la pince, et du coefficient d'inductance mutuelle M entre le fil et la pince.

On remarque pour la suite que $L = N \times M$.

- 21 - Réaliser un schéma électrique équivalent du circuit de la pince ampèremétrique, faisant apparaître la résistance électrique R et une fem dont on indiquera le sens et l'expression en fonction de $L, M, \frac{di}{dt}$ et $\frac{dI}{dt}$.

- 22 - En déduire l'équation différentielle suivante : $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = -\frac{1}{N} \frac{dI}{dt}$, avec τ un temps caractéristique dont on donnera l'expression.

- 23 - On considère ici que $I(t) = I_0 \cos \omega t$, on est donc en régime sinusoïdal forcé. On suppose le régime permanent atteint. On note les grandeurs complexes associées à $I(t)$ et $i(t)$ par \underline{I} et \underline{i} . On définit la fonction de transfert de la pince $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{I}}$. Donner son expression en fonction de τ, N et ω .

- 24 - De quel type de filtre s'agit-il ? Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude.

- 25 - Que doit vérifier la pulsation ω pour être en régime "hautes fréquences" ?

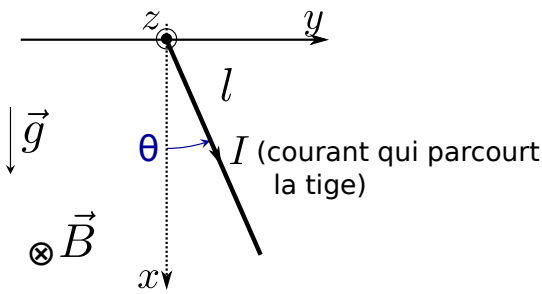
On suppose que c'est le cas. Donner alors le lien entre $i(t)$ et $I(t)$.

On voit donc, finalement, que la mesure de $i(t)$ par l'ampèremètre de la pince permet de remonter facilement au courant $I(t)$.

- 26 - Une pince ampèremétrique peut-elle mesurer un courant continu ?

III Pendule pesant magnétique

L'objectif de l'exercice est de décrire le comportement d'un pendule pesant, conducteur électrique, placé dans un champ magnétique. On négligera tout phénomène d'induction ainsi que tout frottement.



On modélise ce pendule par une tige rigide, homogène, de masse m et de longueur l , libre de tourner autour d'un axe horizontal (Oz) passant par une de ses extrémités. On note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. Le centre de masse G de la tige est situé en son milieu. Le pendule est repéré par l'angle θ qu'il forme avec la verticale. Un dispositif non représenté permet de faire circuler un courant électrique d'intensité I dans la tige. Le pendule est placé dans un champ magnétique $\vec{B} = -B\vec{u}_z$, supposé constant et uniforme à l'échelle du pendule.

a/ Courant I constant

On suppose le courant I constant.

- 27 - Établir l'expression de la résultante des forces de Laplace qui s'exerce sur la tige.
- 28 - Montrer que le moment selon l'axe Oz des forces de Laplace s'écrit $\Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) = \frac{Il^2B}{2}$.
- 29 - Lister les autres actions mécaniques (autres que celles de Laplace) subies par le pendule et déterminer leurs moments par rapport à l'axe (Oz).
- 30 - Déterminer la ou les positions d'équilibre θ_{eq} du pendule. Y a-t-il toujours existence d'une position d'équilibre ?
- 31 - Établir l'équation différentielle vérifiée par θ lorsqu'il y a mouvement, et la mettre sous la forme
- $$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = k \times I \quad (1)$$
- avec ω_0 et k deux constantes dont on donnera l'expression.
- 32 - On suppose le mouvement tel que l'on peut approximer $\sin \theta \simeq \theta$. Qu'est-ce que cette hypothèse implique en termes de condition initiale ? en termes d'intensité du courant (en supposant le champ magnétique fixé) ?
- 33 - Toujours dans l'approximation des petits angles, on lâche sans vitesse initiale la tige d'un angle θ_0 . Déterminer l'expression de la solution $\theta(t)$ en fonction de θ_0 , k , I , ω_0 et t .
- 34 - Quelle est l'expression de la période des oscillations ?

b/ Courant I harmonique

On suppose désormais que le courant circulant dans le pendule n'est plus constant, mais harmonique de pulsation ω ,

$$I(t) = I_m \cos \omega t, \quad (2)$$

et on se place dans l'approximation des petits angles.

- 35 - En partant de l'équation (1), linéarisée pour les petits angles, établir la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{\theta}/\underline{I}$ du pendule (l'exprimer en fonction de k , ω_0 et ω).
- 36 - Donner un équivalent de \underline{H} dans les limites très basse et très haute fréquence. Que vaut le déphasage dans ces deux cas ? Que vaut l'amplitude des oscillations dans ces deux cas ?
- 37 - Que se passe-t-il lorsque $\omega = \omega_0$? Cela vous semble-t-il raisonnable ? Pourquoi cette situation est-elle inobservable en pratique ?

c/ Résolution numérique

On souhaite maintenant résoudre numériquement l'équation du mouvement sans approximation :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = k \times I_m \cos \omega t. \quad (3)$$

Pour cela, on transforme l'équation d'ordre 2 sur θ en une équation d'ordre 1 sur le couple $y = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$.

Donc y est un vecteur à deux composantes :

- sa première composante est $y_0 = \theta$,
- sa seconde composante est $y_1 = \dot{\theta}$.

import scipy.integrate as spi
spi.odeint(F, Y0, Vt) → renvoie une solution numérique du problème de Cauchy $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}(t), t)$, où $\mathbf{Y}(t)$ est un vecteur d'ordre n , avec la condition initiale $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y0}$, pour les valeurs de t dans le vecteur \mathbf{Vt} commençant par t_0 , sous forme d'une matrice $n \times k$

- 38** - Transformer l'équation d'ordre 2 sur $\theta(t)$ en une équation d'ordre 1 sur le couple y . On écrira cette équation comme $\frac{dy}{dt} = F(y, t)$ en donnant l'expression de la fonction F , qui donc est une fonction qui retourne deux composantes.
- 39** - En vous aidant de la description de la fonction `odeint` ci-dessus, compléter le code suivant afin d'obtenir la solution $\theta(t)$. Les conditions initiales doivent être $\theta(0) = \pi/2$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Vous donnerez sur votre copie uniquement les morceaux de code à compléter (inutile de tout recopier).

```
# ----- Import des bibliothèques
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.integrate as spi
w0 = 3
k = 2
w = 6
Im = 1

# Définition de la fonction F
def F(y,t):
    return # à COMPLÉTER

t = np.linspace(0, 5*2*3.14/w0, 1000) # tableau des temps
theta0 = # à COMPLÉTER
theta_prime0 = # à COMPLÉTER
y_ini = (theta0, theta_prime0) # valeur initiale de y
y_sol = # appel à spi.odeint à COMPLÉTER
theta = y_sol[:,0] # récupération de la solution
theta_prime = y_sol[:,1]

plt.figure("figure")
plt.plot( # tracé de theta en fonction de t, à COMPLÉTER
plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel("theta (degrés)")
plt.show()
```