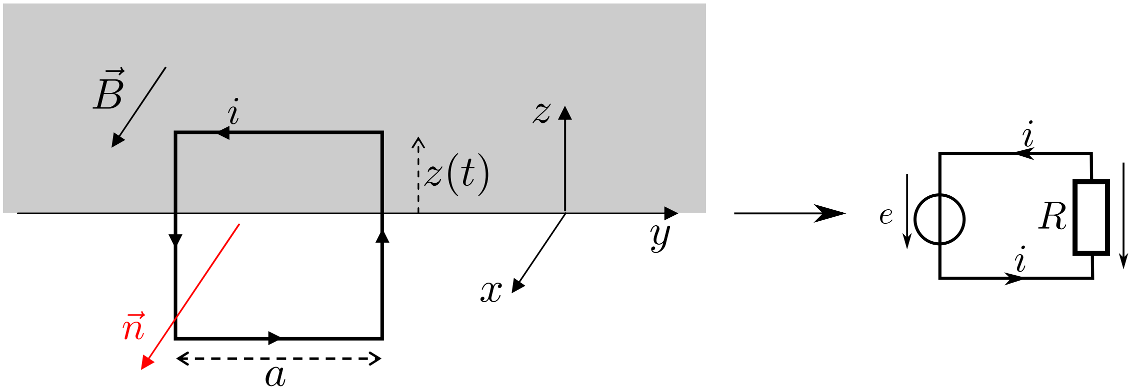
Correction – TD – Induction et conversion de puissance

I Amortissement électromagnétique [● ○ ○]



1 - (i) Orientation : on repère le courant dans le sens de la flèche indiquée sur le schéma. D'après la règle de la main droite, la normale à la surface du contour est donc selon $+\vec{e}_x$.

(ii) Flux de $\vec{B}$ à travers le circuit : $\Phi = \vec{B} \cdot S\vec{n} = az(t)\,B_0$ (attention à ne prendre en compte que la surface où $\vec{B}$ est non nul).

(iii) Circuit électrique équivalent : juste une résistance et un générateur en série. Le générateur a une fem donnée par la loi de Faraday (en convention générateur, donc dans le sens du courant) :

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -a\dot{z}\,B_0.$$

(iv) Loi des mailles dans ce circuit : $e(t) = Ri$. On en déduit $\boxed{i(t) = -\frac{a\dot{z}\,B_0}{R}.}$

2 - La force de Laplace ne s'exerce que là où il y a un champ magnétique.

- Sur le côté gauche et le côté droit : $\vec{F} = iz\vec{e}_z \wedge \vec{B} + iz(-\vec{e}_z) \wedge \vec{B} = \vec{0}$.
- Sur le côté supérieur : $\vec{F} = ia(-\vec{e}_y) \wedge \vec{B} = iaB_0\,\vec{e}_z$.

D'où la résultante totale : $\boxed{\vec{F} = -\frac{a^2\dot{z}\,B_0^2}{R}\,\vec{e}_z.}$

On remarque qu'elle est opposée à la vitesse (selon $-\dot{z}\vec{e}_z$), ce qui est attendu à cause de la loi de Lenz : les effets de l'induction s'opposent à leur création, donc ici la force de Laplace s'oppose à la mise en mouvement.

3 - On veut mettre cette résultante sous la forme $\vec{F} = -h\,\vec{v}$.

C'est bien le cas ici avec $h = \frac{(aB_0)^2}{R}$. $h > 0$, on a donc bien une force qui s'oppose à la vitesse et qui sert d'amortissement.

Avec les valeurs données, il faut $B_0 = \frac{\sqrt{Rh}}{a} = 10\,\mathrm{T}$. Ce n'est pas réalisable avec un aimant permanent, mais possible avec un électroaimant assez puissant.

II Étude d'un haut-parleur [$\bullet\bullet\circ$]

1 - Force de Laplace.

Si $i > 0$, la règle de la main droite (pouce sur i, index sur $\vec{B}$, le majeur donne $\vec{F}_L$) indique que la bobine se déplace vers les z négatifs.

Équation mécanique

2 - On étudie l'ensemble des parties mobiles, de masse m, dans un référentiel galiléen.

Bilan des forces :

- Force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda v\vec{e}_z$.
- Force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_z = -kz\,\vec{e}_z$ car on voit sur le schéma que $l - l_0 = z$.
- Force de Laplace $\vec{F}_L = -ilB_0\,\vec{e}_z$.
- Forces de réaction verticale et poids qui ne vont pas intervenir sur $\vec{e}_z$.

Principe fondamental de la dynamique, directement projeté sur $\vec{e}_z$:

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -ilB_0 - \lambda v - kz.}$$

3 - On a $v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, et donc en complexes $\underline{v} = \mathrm{j}\omega\,\underline{z}$.

4 - On passe l'équation précédente en complexes :

$$\mathrm{j}\omega\, m\underline{v} = -lB_0\,\underline{i} - \lambda\underline{v} - k\underline{z}.$$

On utilise $\underline{z} = \dfrac{\underline{v}}{\mathrm{j}\omega}$ et on obtient rapidement :

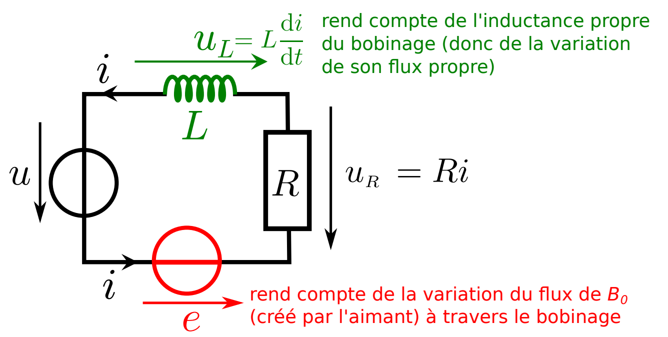
$$\boxed{\left(\lambda + j\omega m + \frac{k}{\mathrm{j}\omega}\right)\underline{v} = -lB_0\underline{i}.}$$

Équation électrique

5 - $\vec{F}_L \cdot \vec{v} + ei = 0$ s'écrit aussi $ei = -(-ilB_0) \times v$, d'où $\boxed{e = vB_0l.}$

6 - Schéma électrique équivalent : cf ci-contre.

Remarque : on traite séparément l'effet de la variation du flux créé par l'aimant à travers le bobinage (fem e, toujours en convention générateur, c'est elle que la question précédente permet de trouver à l'aide de $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + ei = 0$), et l'effet de la variation du flux propre du bobinage (inductance L, toujours en convention récepteur).



La loi des mailles donne : $u + e = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Or $e = vB_0l$, donc on a

$$\boxed{u = -vB_0l + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.}$$

7 - En passant en complexe on en déduit immédiatement :

$$\boxed{\underline{u} = (R + \mathrm{j}L\omega)\underline{i} - B_0l\underline{v}.} \tag{1}$$

Étude de la réponse en fréquence

8 - Un haut-parleur parfait aurait une réponse plate : $|\underline{G}|(\omega) = \text{cst}$, car il n'amplifierait ni ne diminuerait certaines fréquences par rapport à d'autres.

Ici on voit que ce n'est pas le cas, et que les fréquences intermédiaires seront amplifiées.

On s'y attendait, il y a en fait une résonance proche de la pulsation du système mécanique, $\omega = \sqrt{k/m}$. Elle est toutefois assez large, et elle le sera d'autant plus que les frottements sont importants.

On constate aussi que $|\underline{G}|$ tend vers 0 à hautes fréquences : le haut-parleur ne peut plus suivre les variations de tension.

Étude énergétique

9 -

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-ilB_0}_{=F_L} - kz - \lambda v \\ u = \underbrace{-vB_0 l}_{=-e} + Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -ilB_0 v - kzv - \lambda v^2 \\ ui = -vB_0 li + Ri + Li\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

On soustrait les deux équations afin d'éliminer le terme de couplage vB_0il :

$$ui - mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + kzv + \lambda v^2$$

On utilise $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}$, $\quad i\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}i^2}{\mathrm{d}t}$, $\quad zv = z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t}$, et on isole ui :

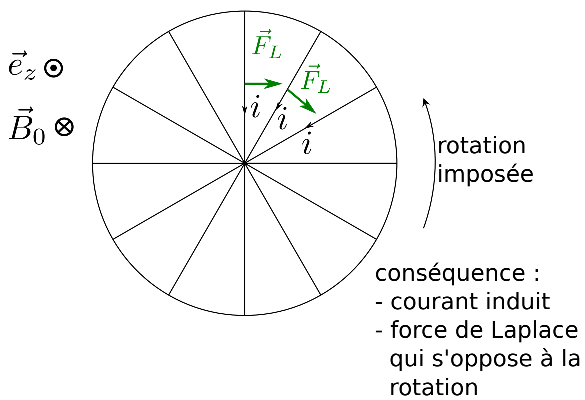
$$\boxed{ui = Ri^2 + \lambda v^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}mv^2\right).}$$

On voit donc que la puissance électrique fournie au haut-parleur ($u \times i$) se répartie en :

- une puissance Ri^2 perdue par effet Joule,
- une puissance λv^2 perdue par frottement, qui est en fait cédée à l'air et constitue la puissance de l'onde sonore émise (si on néglige les frottements bobine/aimant et autres).
- un gain d'énergie potentiel du ressort, d'énergie cinétique de l'ensemble mobile, et d'énergie magnétique stockée par la bobine.
  Si on moyenne sur une période, ces trois termes sont nuls.

III Machine à courant continu à entrefer plan [• • ○]

b/ Fonctionnement en générateur



1 - Idem rail de Laplace : le conducteur se déplaçant dans un champ $\vec{B}$ va induire un courant.

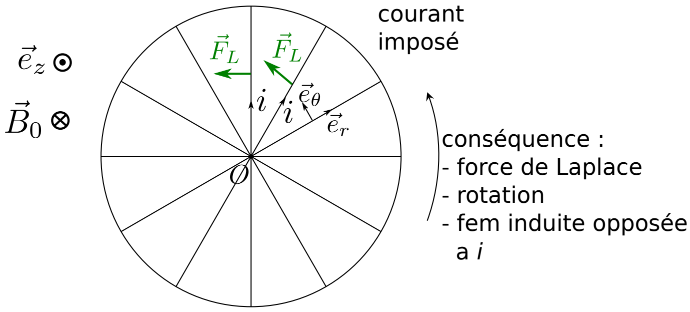
2 - D'après la loi de Lenz, l'induction va s'opposer à la mise en rotation de la roue.

Donc la force de Laplace doit être comme sur le schéma ci-contre, ce qui implique que i va vers le centre de la roue sur chaque rayon (règle main droite).

Conclusion : on a bien un générateur de courant.

c/ Fonctionnement en moteur

3 - Courant i dans un champ $\vec{B}_0$: il y a une force de Laplace $\vec{F}_L = i\vec{L} \wedge \vec{B}_0$ sur chaque rayon, qui fait tourner la roue.



Conclusion : on a bien un moteur. Mettons en équation son fonctionnement.

Équation mécanique

4 -

- Force de Laplace : $\vec{F}_L = i\vec{L} \wedge \vec{B}_0 = ia\vec{e}_r \wedge (-B_0\vec{e}_z) = iaB_0\vec{e}_\theta$.
  C'est bien dans le sens attendu.
- Point d'application : le milieu du rayon.
- Moment en O : $\vec{\Gamma}_O = \dfrac{a}{2}\vec{e}_r \wedge \vec{F}_L = \dfrac{ia^2B_0}{2}\vec{e}_z$.

5 - En conclusion, on en déduit que le couple de Laplace exercé par les N rayons sur la roue est

$$\Gamma_L = \frac{Nia^2B_0}{2} = \underbrace{\frac{a^2B_0}{2}}_{K}\underbrace{Ni}_{i_{\text{tot}}}.$$

$\Rightarrow$ Le couple résultant des actions de Laplace sur une MCC est proportionnel au courant qui la parcourt :

$$\boxed{\Gamma_L = Ki_{\text{tot}}.}$$

Nous pouvons poursuivre en écrivant l'équation mécanique, à l'aide du TMC appliqué à la roue. Supposons pour cela que le moteur doive entraîner une charge qui nécessite un couple utile $\vec{\Gamma}_u = -\Gamma_u\vec{e}_z$ ($\Gamma_u > 0$). Alors :

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_L - \Gamma_u$$

$$\boxed{J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = Ki_{\text{tot}} - \Gamma_u.}$$

Équation électrique

6 - $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \Gamma_L\omega = Ki_{\text{tot}}\omega$.
Donc $Nei = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -KNi\omega$, d'où $e = -K\omega$.

$\Rightarrow$ La fem d'une MCC est proportionnelle à sa vitesse angulaire :

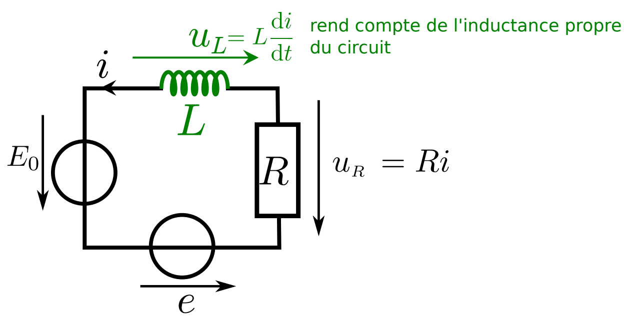
$$\boxed{e = -K\omega,}$$

et la constante de proportionnalité est la même que celle de la relation entre couple et courant ($\Gamma_L = Ki_{\text{tot}}$).

7 -

$$E_0 = Ri - e + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{E_0 = Ri + K\omega + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.}$$



Remarque : on traite séparément l'effet de la variation du flux créé par le mouvement dans $\vec{B}_0$ externe (c'est uniquement elle qui intervient dans la relation $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + ei = 0$), et l'effet de la variation du flux propre du bobinage (inductance L, qui n'intervient pas dans le e de $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + ei = 0$).

Bilan énergétique

Illustrons une méthode générale pour mener un bilan énergétique. Il faut écrire l'équation électrique, multipliée par i_{tot} (donc par Ni), et l'équation mécanique multipliée par ω (ou par v si c'est une pièce en translation) :

$$\begin{cases} J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = Ki_{\text{tot}} - \Gamma_u \\ E_0 = Ri + K\omega + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\omega = KNi\omega - \Gamma_u\omega \\ NE_0 i = NRi^2 + NK\omega i + NL\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i \end{cases}$$

On soustrait les deux pour éliminer le terme $NK\omega i$:

$$NE_0 i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = NRi^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N\frac{1}{2}Li^2\right) + \Gamma_u\omega.$$

On a donc :

$$E_0 i_{\text{tot}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N\,\frac{1}{2}Li^2\right) + N\,Ri^2 + \Gamma_u\omega.$$

8 - On voit donc que la puissance électrique fournie au moteur ($E_0 i_{\text{tot}}$) sert à :

- augmenter l'énergie cinétique de l'axe,
- augmenter l'énergie magnétique stockée par le circuit (dans les N inductances des rayons),
- est dissipée par effet Joule (dans les N rayons),
- fournit une puissance mécanique $\Gamma_u\omega$ sur l'axe moteur.

Identifier chacun de ces éléments avec un des termes de gauche de la dernière équation.

IV Machine synchrone [• • ○]

1 - Le champ magnétique total est alors :

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_1(t) + \vec{B}_2(t) = kI_0(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y),$$

ce qui est bien un vecteur de norme constante qui tourne à la vitesse angulaire ω.

2 - Pour un moteur synchrone on a $\omega = \omega'$. L'angle $\theta = (\vec{m},\vec{B})$ est donc constant une fois le régime permanent atteint.

3 - Le couple fourni par le moteur est $\boxed{\vec{\Gamma}_L = \vec{m}\wedge\vec{B} = mB\,\sin\theta\,\vec{e}_z.}$

4 - À vide, le couple fourni est nul, donc $\theta = 0$.

Dans le deuxième cas, on a $mB\,\sin\theta = \Gamma_c$, d'où $\theta = \arcsin\dfrac{\Gamma_c}{mB} = 0{,}42\,\text{rad} = 24°$.

La puissance fournie par le moteur est $\mathcal{P} = \Gamma_c \times \omega = 0{,}65 \times (50\times 2\pi) = 2{,}0\times 10^2\,\text{W}$.

5 - La vitesse de rotation ne dépend pas de la charge. Elle est toujours donnée par la vitesse de rotation du champ produit par le stator (50 tours par seconde ici). C'est un des avantages du moteur synchrone.

On a $\Gamma_L = mB\,\sin\theta$. Le couple maximal est donc obtenu pour $\theta = \pi/2$, et donc $\Gamma_{\max} = mB = 16\,\text{N}\cdot\text{m}$.

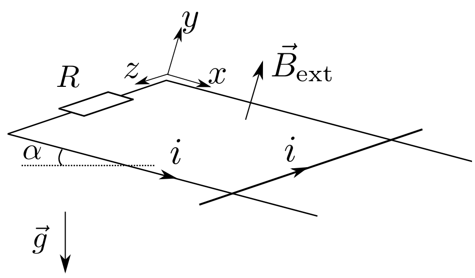
Remarques culturelles :

Les machines synchrones possèdent un excellent rendement (meilleur que les MCC), sont robustes et capables de délivrer des couples importants. La seule difficulté est leur démarrage : le rotor peut ne pas accrocher le champ tournant, et il faut donc soit le lancer avec un moteur annexe (une MCC par exemple), soit augmenter progressivement la fréquence d'excitation de l'inducteur.

Elles sont réversibles, c'est-à-dire qu'elles peuvent fonctionner en générateur. Dans ce cas on fournit une puissance mécanique pour faire tourner le stator. Celui-ci agit comme un aimant tournant, qui induit des variations de flux dans les bobines du stator, et donc une fem et un courant. (C'est l'exercice VI du TD du chapitre précédent.) C'est ce qui est utilisé dans les centrales de production d'électricité.

V Rails de Laplace inclinées [• • ○]

Pour poursuivre la discussion il faut orienter le circuit. On choisit le sens ci-contre, qui est tel que la normale sortante soit dans le même sens que $\vec{B}_{\text{ext}}$.



1 - Les rails étant inclinés, la barre mobile va glisser vers le bas, donc vers les x croissants.

Lorsque la barre glisse, la surface du circuit augmente. Donc le flux Φ de $\vec{B}_{\text{ext}}$ à travers le circuit (qui est >0 d'après notre choix) va augmenter.

D'après la loi de Faraday, ceci va créer une force électromotrice $-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ négative. Cette fem étant dans le sens de i, ceci signifie que le courant sera en fait négatif.

Enfin, ce courant (et le champ $\vec{B}_{\text{ext}}$) va produire sur la barre une force de Laplace orientée selon $-\vec{e}_x$. Ceci va donc retenir la barre. C'est conforme à la loi de modération de Lenz, qui indique que les effets (ici la force de Laplace) s'opposent aux causes qui les ont créés (ici la cause est le glissement de la barre mobile) : la force de Laplace s'oppose au glissement de la barre.

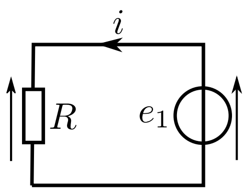
Remarque : On pouvait en dire moins et rester plus "intuitif" en énonçant seulement la loi de Lenz.

2 - ⋆ Étape 1 : orienter. C'est déjà fait.

⋆ Étape 2 : Flux du champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ à travers le circuit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_S (B_{\text{ext}}\vec{e}_y)\cdot(\mathrm{d}S\vec{e}_y) = B_{\text{ext}} \iint_S \mathrm{d}S = B_{\text{ext}} \times ax.$$

⋆ Étape 3 : Schéma électrique équivalent.
On ajoute une fem est en convention générateur, qui remplace en quelque sorte la barre mobile. Le reste est inchangé.
La fem est donnée par la loi de Faraday :
$e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B_{\text{ext}}a\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Bav$ avec v la vitesse de la barre selon $\vec{e}_x$.

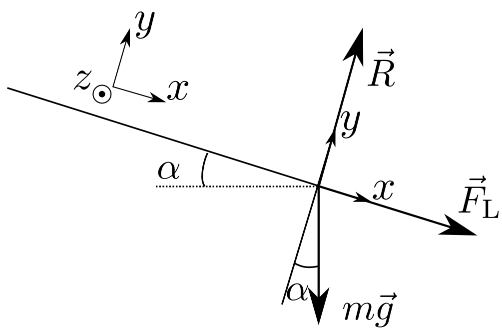


⋆ Étape 4 : Loi des mailles, donc ici $e_1 = Ri$, soit l'équation électrique :

$$\boxed{-B_{\text{ext}}av = Ri.}$$

Comme $v>0$ (la barre glisse vers le bas), on voit avec cette égalité que $i<0$.

3 - Liste des forces :



- Force de Laplace, $\vec{F}_\mathrm{L} = ia\vec{u} \wedge \vec{B}_\mathrm{ext}$, avec $\vec{u}$ vecteur sur la barre dans le sens de i, donc ici $\vec{u} = -\vec{e}_z$.

  On a donc $\vec{F}_\mathrm{L} = -ia\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y B_\mathrm{ext} = iaB_\mathrm{ext}\vec{e}_x$.

- Poids de la barre $\vec{P} = m\vec{g}$.
  Attention, $\vec{g}$ est à la fois selon x et y. On a en fait

  $$\vec{P} = mg(-\cos\alpha\vec{e}_y + \sin\alpha\vec{e}_x).$$

- Réaction du support $\vec{R} = R\vec{e}_y$.

D'autre part, la vitesse est $\vec{v} = v\vec{e}_x$.

Le pfd indique que $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_\mathrm{L} + \vec{P} + \vec{R}$,

$$\text{soit} \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x = iaB_\mathrm{ext}\vec{e}_x + mg(-\cos\alpha\vec{e}_y + \sin\alpha\vec{e}_x) + R\vec{e}_y.$$

On s'intéresse à la composante selon $\vec{e}_x$:

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iaB_\mathrm{ext} + mg\sin\alpha.} \qquad \text{(équation mécanique)}$$

4 - Dans l'équation mécanique, on remplace le courant i par l'expression $i = -B_\mathrm{ext}av/R$ donnée par l'équation électrique. On a donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{(aB_\mathrm{ext})^2}{mR}\,v + g\sin\alpha.}$$

Sur cette équation on vérifie que le terme en g est > 0 et fait bien augmenter la vitesse, alors que le terme dû au phénomène d'induction est < 0 et freine la barre (conformément à la loi de Lenz).

5 - a - Le temps τ qui apparait dans l'équation ci-dessus est $\boxed{\tau = \dfrac{mR}{(aB_\mathrm{ext})^2}}$.

On a alors une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, et le régime permanent est atteint au bout de quelque fois τ (penser à la charge d'un condensateur).

b - On se place en régime permanent, où les grandeurs ne varient plus. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, et l'équation sur v indique que

$$0 = -\frac{(aB_\mathrm{ext})^2}{mR}\,v + g\sin\alpha, \quad \text{soit} \quad \boxed{v = \frac{mRg\sin\alpha}{(aB_\mathrm{ext})^2}.}$$

On peut vérifier plusieurs choses sur cette dernière égalité : si $\alpha = 0$ (pas d'inclinaison), alors $v = 0$; plus B_ext est élevé plus cette vitesse finale est faible (le champ B freine la barre) ; plus g est grand plus la vitesse finale est grande, etc.
Enfin, le courant est

$$\boxed{i = -\frac{B_\mathrm{ext}av}{R} = -\frac{mg\sin\alpha}{aB_\mathrm{ext}}}.$$

c - ⋆ Puissance mécanique reçue par la tige mobile suite à la force de pesanteur :

$$\mathcal{P}_\text{méca reçue par tige} = m\vec{g}\cdot\vec{v} = m\vec{g}\cdot v\vec{e}_x = mgv\sin\alpha = mg\left(\frac{mRg\sin\alpha}{(aB_\mathrm{ext})^2}\right)\sin\alpha.$$

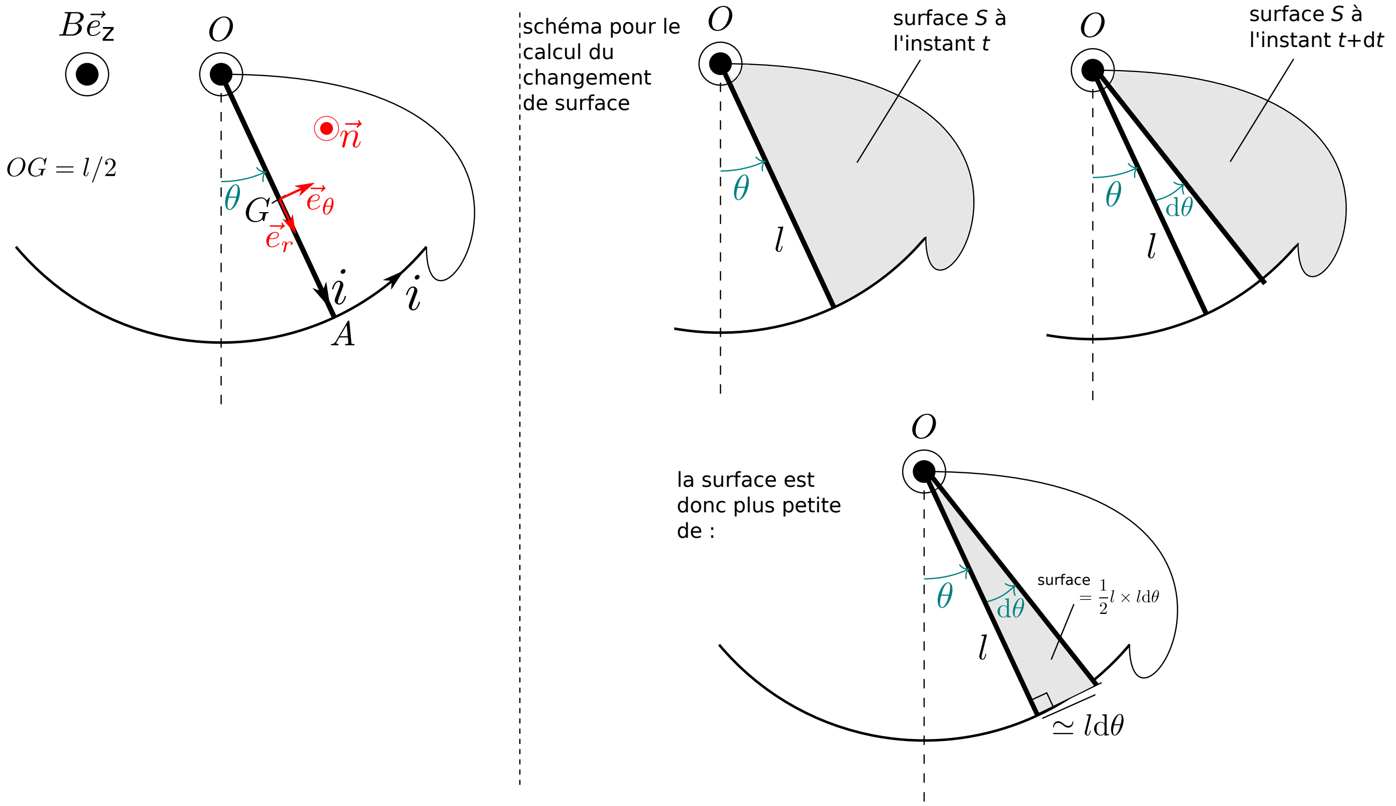
⋆ Puissance électrique reçue par la résistance R :

$$\mathcal{P}_\text{élec reçue par R} = Ri^2 = R\left(\frac{mg\sin\alpha}{aB_\mathrm{ext}}\right)^2$$

⋆ Conclusion : en simplifiant les deux expressions ci-dessus, on voit qu'on a l'égalité $\boxed{\mathcal{P}_{\text{méca reçue par tige}} = \mathcal{P}_{\text{élec reçue par R}}}$.

On voit donc que toute la puissance fournie mécaniquement au système (ici la puissance fournie par la force de pesanteur) est transformée en puissance électrique (ici reçue par la résistance). On a donc transformé de l'énergie mécanique en énergie électrique, et avec une efficacité de 100% dans ce modèle (qui néglige des pertes, par frottements par exemple).

VI Pendule amorti par induction [•••]



1 - ⋆ Commençons par **l'équation électrique**.

– Orientation du circuit : cf schéma ci-dessus.

– Calcul du flux : $\Phi = \vec{B} \cdot S\vec{n} = BS$.

On ne connaît pas la surface totale, mais elle dépend du temps.

On a $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = B\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$. Or on voit sur le schéma ci-dessus à droite que entre t et $t + \mathrm{d}t$, la surface du circuit qui intercepte le champ $\vec{B}$ *décroît* de l'aire grisée, donc on a :

$$S(t + \mathrm{d}t) - S(t) = -\frac{1}{2} l \times l\mathrm{d}\theta.$$

La dérivée de la surface par rapport au temps est donc :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{S(t + \mathrm{d}t) - S(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{-\frac{1}{2} l \times l\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} l^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

Et pour le flux :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} B l^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

Ceci permet d'avoir la fem induite dans le schéma électrique équivalent, en convention générateur :

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} B l^2 \dot{\theta}.}$$

– Schéma électrique équivalent : une fem et une résistance (on néglige l'inductance propre), donc la loi des mailles donne $e = Ri$, et donc le courant est :

$$\boxed{i = \frac{Bl^2\dot{\theta}}{2R}.}$$

⋆ **Équation mécanique :**

Il faut exprimer le moment des forces de Laplace. La force de Laplace sur la tige est :

$$\vec{F}_L = il\vec{e}_r \wedge B\vec{e}_z = -ilB\vec{e}_\theta.$$

Le couple par rapport à O est donc (car la résultante s'applique au milieu G) :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{F}_L) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_L = \frac{l}{2}\vec{e}_r \wedge -ilB\vec{e}_\theta = -\frac{il^2B}{2}\vec{e}_z.$$

Et le couple selon l'axe Oz est donc

$$\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) - \frac{il^2B}{2}.}$$

Remarque : Si on trouve le calcul de e ci-dessus trop compliqué avec la surface $S(t)$, on peut aussi obtenir e en utilisant la relation $ei + \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = 0$, qui donne $ei = -\Gamma_{Oz}(\vec{F}_L)\dot{\theta} = \frac{il^2B}{2}\dot{\theta}$, et on retrouve bien $e = \frac{l^2B\dot{\theta}}{2}$.

Poursuivons : on injecte l'expression de i dans $\Gamma_{L,Oz}$:

$$\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) = -\frac{l^4B^2\dot{\theta}}{4R}.}$$

On remarque que ce moment s'oppose toujours à $\dot{\theta}$, donc est toujours opposé au mouvement. C'est en accord avec la loi de Lenz.

Il faut ensuite le moment en O du poids :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2}\vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_x = -\frac{mgl}{2}\sin\theta\,\vec{e}_z,$$

et donc

$$\Gamma_{Oz}(\vec{P}) = -\frac{mgl}{2}\sin\theta.$$

On applique le théorème du moment cinétique à la tige, par rapport à l'axe Oz :

$$\frac{\mathrm{d}(J\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{Oz}(\vec{P}) + \Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) + \Gamma_{Oz}(\text{liaison pivot}),$$

d'où

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{2}\sin\theta - \frac{l^4B^2\dot{\theta}}{4R}, \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{l^4B^2}{4JR}\dot{\theta} + \frac{mgl}{2J}\sin\theta = 0.$$

En utilisant $J = \frac{1}{3}ml^2$:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3l^2B^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0.}$$

2 - Oscillations de petite amplitude : $\sin\theta \simeq \theta$, et on a

$$\ddot{\theta} + \frac{3l^2B^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0.$$

Les oscillations sont amorties si et seulement si le discriminant de l'équation caractéristique est positif :

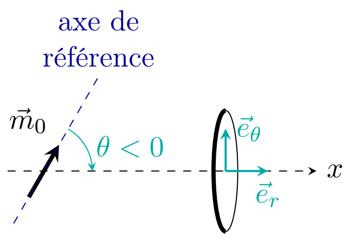
$$\Delta = \left(\frac{3l^2B^2}{4mR}\right)^2 - 4\,\frac{3g}{2l} \geq 0.$$

Après quelques manipulations, on obtient le critère

$$\boxed{B \geq \left(\frac{32}{3}\,\frac{gm^2R^2}{l^5}\right)^{1/4}.}$$

VII Principe d'un générateur synchrone [•••]

1 - ⋆ On voit sur le dessin ci-dessous que l'angle entre le moment est l'axe de la spire est $\theta = -\omega t$ (il est bien négatif). On a aussi $r = x$.



Par conséquent, au centre de la spire :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, m_0}{4\pi\, r^3}\left(2\cos\omega t\vec{e}_r - \sin\omega t\vec{e}_\theta\right).$$

Le calcul du flux impose de choisir une orientation, et nous prenons le choix du schéma ci-contre. La normale est alors $\vec{e}_x$, ce qui est aussi $\vec{e}_r$, et donc

$$\Phi = \vec{B}\cdot(\pi a^2)\vec{e}_r = \frac{\mu_0\, m_0}{4\pi\, x^3} 2\cos\omega t \times \pi a^2, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Phi = \frac{\mu_0 a^2\, m_0}{2x^3}\cos\omega t.}$$

⋆ La fem induite est donc $\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 a^2 m_0 \omega}{2x^3}\sin\omega t.}$

Remarque : On peut vérifier le signe, puisque à $t \gtrsim 0$ l'aimant se désaligne et donc le flux décroit, donc d'après la loi de Faraday $e > 0$, c'est bien ce qu'on a.

⋆ Un schéma électrique équivalent, et une loi des mailles, permet d'obtenir le courant $\boxed{i = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0 a^2 m_0 \omega}{2Rx^3}\sin\omega t.}$

⋆ La puissance qu'elle reçoit est

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{élec spire}} = e \times i = Ri^2 = \frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2 \omega^2}{4Rx^6}\sin^2\omega t.}$$

2 - Il faut d'abord calculer le champ magnétique créé par la spire au niveau du centre de l'aimant.

La spire réalise un moment magnétique donné par $\boxed{\vec{m}_s = \pi a^2\, i\, \vec{e}_x,}$ et l'énoncé donne justement l'expression du champ créé par un moment magnétique.

Attention au repérage : cette fois on a un repère centré sur le centre de la spire, donc dans ce repère l'aimant a pour coordonnées polaires $r = x$ et $\theta = \pi$, et au niveau de l'aimant on a $\vec{e}_r = -\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_y$.

Donc le champ créé par la spire au niveau de l'aimant vaut :

$$\vec{B}_s(O) = \frac{\mu_0\, m_s}{4\pi\, x^3}\left(2\cos\pi(-\vec{e}_x) + \sin\pi(-\vec{e}_y)\right) = \frac{\mu_0\, m_s}{2\pi\, x^3}\vec{e}_x.$$

Le couple subit par l'aimant est donc :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m}_0 \wedge \vec{B}_s(O) = \frac{\mu_0\, m_s}{2\pi\, x^3} \underbrace{\vec{m}_0 \wedge \vec{e}_x}_{=-m_0 \sin\omega t\, \vec{e}_z}$$

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0\, m_s}{2\pi\, x^3}\, m_0 \sin\omega t\, \vec{e}_z$$

En remplaçant m_s par son expression $m_s = \pi a^2\, i$, et i par l'expression de la question 1, on obtient :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0^2\, a^4 m_0^2 \omega}{4R\, x^6}\, \sin^2\omega t\; \vec{e}_z.}$$

On remarque que ce couple est négatif, c'est-à-dire qu'il s'oppose à la rotation de l'aimant dans le sens positif autour de l'axe. C'est normal : les effets de l'induction (ici le courant i dans la spire, et donc la production de ce couple) s'opposent aux causes qui les produisent (donc s'opposent à la rotation de l'aimant).

3 - La puissance à fournir est

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{fournie à l'aimant}} = \Gamma\omega = \frac{\mu_0^2\, a^4 m_0^2 \omega^2}{4R\, x^6}\, \sin^2\omega t.}$$

On trouve précisément la même chose que pour la puissance électrique : $\mathcal{P}_{\text{fournie à l'aimant}} = \mathcal{P}_{\text{élec spire}}$.

Ceci explique donc bien qu'on a une conversion toute la puissance mécanique fournie à l'aimant en une puissance électrique.

VIII Moteur homopolaire de Faraday [• • ○]