Méthodes numériques

TP – Action d'un filtre sur un signal périodique

Objectifs :

- Tracer un signal si on se donne la valeur des coefficients de son spectre.
- Simuler l'action d'un filtre sur ce signal (on se donnera la fonction de transfert du filtre).

Notebook sur Capytale : `b93d-1148224`.

Étape 1 : construction du signal d'entrée

On considère un signal d'entrée $e(t)$, périodique, de fréquence f_e (par exemple $f_e = 1\,\mathrm{kHz}$). Sa pulsation est $\omega_e = 2\pi\, f_e$.

La décomposition de Fourier de ce signal est : $\boxed{e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n).}$

1 - Que représente c_0 ?

Comment s'appelle le premier terme de la somme (pour $n = 1$) ? Quelle est sa pulsation et sa fréquence ?

Comment s'appellent les termes pour $n > 1$? Quelle est la pulsation et la fréquence du terme numéro n ?

2 - On considère le signal harmonique suivant : $e(t) = 0{,}5 + \cos(\omega_e t)$.

Donner la valeur des coefficients c_n et φ_n pour ce signal.

En Python, on se donne la liste des c_n et celle des φ_n, pour le signal d'entrée $e(t)$:

```
c_entree   = [0.5,1]
phi_entree = [0,0]
```

On souhaite ensuite tracer le signal $e(t)$. On dispose pour cela, dans le code, d'une fonction `signal(c,phi,t)`, déjà écrite, qui permet d'obtenir le signal $e(t)$. Lire pour cela sa description dans le code. Pour l'utiliser :

- On crée une liste d'instants `t[i]` avec `t = np.linspace(0,5*Te,500)` (cf code).
- On fait l'affectation : `signal_entree = signal(c_entree,phi_entree,t)`.

  `signal_entree` est alors une liste qui contient les valeurs de $e(t)$.

3 - Compléter le code pour pouvoir tracer la liste `signal_entree` en fonction de la liste `t`. On légendera l'axe des abscisses ("t (s)") et des ordonnées ("signal"), ainsi que la courbe.

4 - Le signal tracé est-il cohérent avec un cosinus d'amplitude 1 et de valeur moyenne 0.5 ?

5 - On souhaite tracer un autre signal.

Modifier les listes `c_entree` et `phi_entree` pour tracer le signal :

$e(t) = 0{,}5 + 2{,}5\ \cos(\omega_e t) + 1{,}5\ \cos(2\omega_e t) + 1{,}5\ \cos(3\omega_e t + \pi/2)$.

Recopier sur votre compte rendu ce que vous avez écrit pour `c_entree` et `phi_entree`.

Étape 2 : signal de sortie du filtre

On rappelle l'action d'un filtre sur le signal d'entrée :

$$\boxed{\begin{array}{c} e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n) \quad \xrightarrow{\text{sys}} \quad s(t) = c_0' + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n' \cos(n\omega_e t + \varphi_n'), \\ \text{avec} \quad c_n' = c_n \times |\underline{H}(n\omega_e)|, \quad \text{et} \quad \varphi_n' = \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega_e)). \end{array}}$$

On commence par l'exemple d'un filtre passe-bas. Sa fonction de transfert, son gain et son argument sont :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}, \quad G = |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2}}, \quad \arg(\underline{H}(\omega)) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}.$$

6 - Compléter les codes des fonctions `G(w)` et `argH(w)` pour le filtre passe-bas. Recopiez les sur votre compte rendu.

7 - Notons c_n' et φ_n' les coefficients du spectre du signal de sortie, et c_n et φ_n ceux du signal d'entrée.

Donner l'expression de c_n' en fonction de c_n et du gain G (à quelle pulsation ce gain doit-il être pris ?).

Donner l'expression de φ_n' en fonction de φ_n et de l'argument $\arg(\underline{H})$ (à quelle pulsation cet argument doit-il être pris ?).

8 - Compléter alors les deux lignes `c_sortie.append` et `phi_sortie.append` en indiquant ce qu'il faut ajouter aux listes `c_sortie` et `phi_sortie` pour les remplir (d'après la question précédente). Recopiez les sur votre compte rendu.

9 - Compléter enfin la ligne `signal_sortie =` qui calcule le signal de sortie à partir de ses coefficients de Fourier `c_sortie` et `phi_sortie` .

10 - La suite du code contient déjà les lignes qui permettent de tracer le signal de sortie. L'exécuter : ceci doit afficher les signaux $e(t)$ et $s(t)$.

Actuellement dans le code, que vaut la fréquence du signal d'entrée ? Et la fréquence $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ du filtre passe-bas ?

Étape 3 : interprétation

11 - Le code correspondant à l'étape 3 est déjà écrit. Il s'agit de lignes, déjà complètes, qui permettent de tracer le diagramme de Bode du filtre sur la figure du haut, et les coefficients c_n et c'_n sur la figure du bas (pour $n = 1,2,...$, mais c_0 n'est pas tracé).

Conservez $f_e = 1\,\text{kHz}$, faire un essai avec $f_0 = 1\,\text{kHz}$, puis $f_0 = 10\,\text{kHz}$ et $f_0 = 100\,\text{Hz}$. Interpréter à chaque fois.

Filtre passe-bande

On s'intéresse ensuite à l'action d'un filtre passe bande :

$$\underline{H}(\omega) \quad = \quad \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

On a alors : $G = |\underline{H}| = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ et $\Delta\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$.

12 - Le bloc de code correspondant est déjà écrit. Essayer.

Si tout fonctionne, faire plusieurs essais (en variant Q et f_0 du filtre) et interpréter à chaque fois.

En particulier, essayer de choisir Q et f_0 pour ne sélectionner que l'harmonique $n = 2$ du signal $e(t)$.

Action sur un signal triangle

Pour étudier l'action du filtre sur un signal triangle, il faut d'abord en construire un. Ses coefficients de Fourier sont les suivants :

$$\begin{cases} \text{si } n \text{ pair :} \quad c_n = 0, \qquad \varphi_n = -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{si } n \text{ impair :} \quad c_n = (-1)^{(n-1)/2} \times \dfrac{8}{\pi^2 n^2}, \qquad \varphi_n = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

En Python, le symbole `%` permet d'obtenir le reste dans la division euclidienne. On peut donc tester si n est pair avec `n%2 == 0` : ceci est vrai si et seulement si n est pair.

13 - Il faut définir les listes `c_entree` et `phi_entree` à l'aide de la définition ci-dessus. On utilisera une boucle du type suivant :

```
c_entree   = []
phi_entree = []
N = 20
for n in range(N):
    phi_entree.append(... à compléter
    if n%2==0:
        c_entree.append( ... à compléter
    else:
        c_entree.append( ... à compléter
```

Tester pour $N = 3, 5, 20$... et voir que votre signal d'entrée est de plus en plus triangulaire. Pour la suite on prendra par exemple 20 termes.

Recopier ce que vous avez écrit sur votre compte rendu.

On s'intéresse ensuite à l'action du filtre passe-bande sur le signal triangle. On souhaite se placer dans trois configurations différentes :

14 - Choisir les caractéristiques du filtre pour ne sélectionner que le fondamental du signal triangle.

15 - Dans quel domaine du diagramme de Bode un filtre a-t-il une action de dérivateur ? Choisir les caractéristiques du filtre pour réaliser la dérivée du signal triangle. (on prendra Q assez faible pour éviter une résonance)

16 - Dans quel domaine du diagramme de Bode un filtre a-t-il une action d'intégrateur ? Choisir les caractéristiques du filtre pour réaliser une primitive du signal triangle.

Ceux qui ont terminé peuvent chercher comment construire un signal créneau (chercher son spectre sur internet), ou bien peuvent câbler un circuit RLC pour réaliser un passe-bande et reproduire (en vrai, avec un GBF et Latis Pro) les observations du TP.