Étude des systèmes linéaires
Chapitre 4

Régime sinusoïdal forcé

I Introduction

1 - Qu'est ce que le régime sinusoïdal forcé ?

Forçage harmonique

$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow s(t) = \overset{?}{S_0} \cos(\omega t + \overset{?}{\varphi_s})$

système linéaire invariant

Intérêt : tout signal est somme de signaux harmoniques

2 - Passage régime transitoire $\longrightarrow$ RSF

$x_H(t) + x_p(t)$ $\qquad$ $x_p(t)$

nulle après qq $\mathcal{T}$

II Représentation complexe d'un signal

1 - Définitions

$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{x}(t) = X_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

amplitude complexe $\underline{X}_0 = X_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \Rightarrow \begin{vmatrix} |\underline{X}_0| = X_0 \\ \arg(\underline{X}_0) = \varphi \end{vmatrix}$

2 - Propriétés

- Sommation des amplitudes complexes
- Dérivation $\times \mathrm{j}\omega$
- Intégration $\times 1/\mathrm{j}\omega$

III Circuits électriques en RSF

1 - Impédances complexes $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i} = \underline{U}_0/\underline{I}_0$

- module, argument, déphasage de u et i
- cas de R, L et C
- limites basses et hautes fréquences
- associations // ou série

+

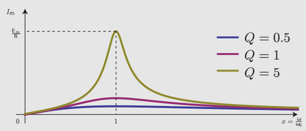
2 - Lois de Kirchhoff $\longrightarrow$ valables en complexes

3 - Exemple

- circuit RL

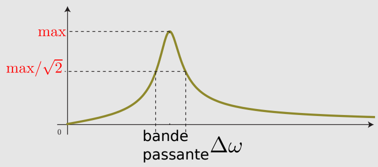
IV Étude de la résonance d'un oscillateur forcé

1 - Le phénomène de résonance



- amplitude importante pour la grandeur suivie
- $\omega_r \simeq \omega_0$
- forte si Q élevé

Bande passante et acuité



Ce qu'il faut connaître

(cours : I)

▶1 Si un système linéaire invariant reçoit en entrée une grandeur du type $e_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, quelle est la forme de la grandeur de sortie ?

(cours : II)

▶2 Pour un signal complexe harmonique $\underline{x}(t)$ de pulsation ω, comment s'écrit $\dot{\underline{x}}$ en fonction de $\underline{x}$? Même question pour $\ddot{\underline{x}}$? Même question pour une primitive de $\underline{x}(t)$?

(cours : III)

▶3 Comment est définie l'impédance complexe d'un dipôle (en fonction de $\underline{u}$ et $\underline{i}$) ?

▶4 Quelle est l'expression de l'impédance complexe d'une résistance ? d'un condensateur ? d'une bobine ? (il faut aussi savoir le redémontrer en partant des lois en notation réelle)

▶5 À quoi est équivalent un condensateur à basse fréquence et à haute fréquence ? Même question pour une bobine.

(cours : IV)

▶6 Comment décrire rapidement ce qu'est un phénomène de résonance ?

Ce qu'il faut savoir faire

(cours : I)

▶7 Repérer le régime transitoire et le régime permanent (sinusoïdal forcé) sur un relevé temporel. → figure page 6

(cours : II)

▶8 Associer à un signal réel harmonique $x(t)$ son signal complexe $\underline{x}(t)$. Faire apparaître l'amplitude complexe. Savoir en déduire l'amplitude et la phase à l'origine. → **EC1**

(cours : III)

▶$_9$ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente. → **EC2**

▶$_{10}$ Utiliser le formalisme complexe pour l'étude d'un circuit en RSF :

- Trouver le comportement équivalent d'un circuit à haute et basse fréquence. → **EC3**
- Obtenir la solution complexe en régime sinusoïdal forcé pour un circuit électrique simple. → **EC4**
- Obtenir la solution réelle à partir de la solution complexe. → **EC4**
- Cf aussi IV du cours.

▶$_{11}$ Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes. → **EC5**

——————— (cours : IV)

▶$_{12}$ Utiliser le formalisme complexe pour l'étude d'un circuit en RSF et identifier une résonance → **EC6**

- Exemples à savoir traiter : résonance en intensité du circuit RLC série (EC6 et TD II), résonance en tension du circuit RLC série (TD III), résonance en élongation de l'oscillateur masse-ressort (TD V).

▶$_{13}$ Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité Q. → TD II

▶$_{14}$ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux. → TD IV, TP

Exercices de cours

Exercice C1 – Associer à un signal réel harmonique $x(t)$ son signal complexe $\underline{x}(t)$ et vice-versa

1 - Donner le signal complexe associé à chacun des signaux suivants (où à chaque fois $u_0 > 0$), et donner l'expression de l'amplitude complexe : **(a)** $u(t) = u_0 \cos(\omega t - \pi/4)$, **(b)** $u(t) = -u_0 \cos(\omega t)$, **(c)** $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$,

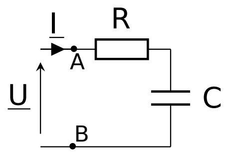
2 - Dans le cas (b), que vaut la phase à l'origine et l'amplitude du signal ?

3 - Dans l'autre sens maintenant : on considère les amplitudes complexes suivantes, donner à chaque fois l'expression du signal réel associé. **(a)** $\underline{U}_0 = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}$, **(b)** $\underline{U}_0 = u_0 \mathrm{j} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$, **(c)** $\underline{U}_0 = -u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$.

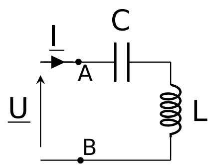
Exercice C2 – Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente

Donner l'expression de l'impédance équivalente à chaque association de dipôles.

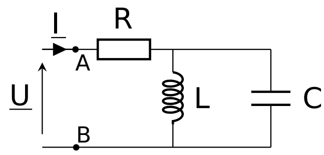
1 -



2 -



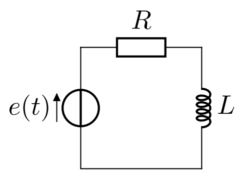
3 -



Exercice C3 – Trouver le comportement équivalent d'un circuit à haute et basse fréquence

On considère le circuit ci-contre. On se place en RSF : $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

1 - Déterminer la valeur du courant $i(t)$ dans le circuit lorsque $\omega \to 0$, et lorsque $\omega \to +\infty$.



Exercice C4 – Obtenir la solution complexe en régime sinusoïdal forcé pour un circuit électrique simple.

On considère à nouveau un circuit RL série alimenté par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

1 - Quel est le signal complexe associé à $e(t)$? Comment s'exprime son amplitude complexe ?

2 - On cherche $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Comment s'écrit la grandeur complexe associée ? Et l'amplitude complexe ?

3 - En étudiant le circuit, trouver l'expression de l'amplitude complexe de $i(t)$ en fonction de E_0, R, L, et ω.

4 - Soit l'amplitude complexe $\underline{I}_0 = \dfrac{E_0}{R + \mathrm{j}L\omega}$ trouvée précédemment. Donner l'expression de l'amplitude et de la phase à l'origine du signal réel associé.

Variante : le faire avec un circuit RC série (mêmes questions pour à la fin exprimer $\underline{I}_0$).

Correction

1 - $e(t) = E_0 \cos \omega t$ est associé au signal complexe $\underline{e}(t) = \underline{E}_0 e^{j\omega t}$, avec l'amplitude complexe $\underline{E}_0 = E_0 e^{j\times 0} = E_0$ (la phase à l'origine est nulle).

2 - $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est associé au signal complexe $\underline{i}(t) = \underline{I}_0 e^{j\omega t}$, avec l'amplitude complexe $\underline{I}_0 = I_0 e^{j\varphi}$.

3 - On travaille en complexes. Loi des mailles :

$$\begin{aligned}\underline{e} &= \underline{u}_R + \underline{u}_L\\ &= \underline{Z}_R \underline{i} + \underline{Z}_L \underline{i}\\ &= R\underline{i} + jL\omega\underline{i}\\ &= (R + jL\omega)\underline{i}.\end{aligned}$$

On a donc

$$E_0 \exp j\omega t = (R + jL\omega)\underline{I}_0 \exp^{j\omega t}.$$

On simplifie les exponentielle et on isole $\boxed{\underline{I}_0 = \dfrac{E_0}{R + jL\omega}.}$

4 - L'amplitude du signal réel $i(t)$ est $\boxed{I_0 = |\underline{I}_0| = \dfrac{E_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}.}$.

Sa phase à l'origine est $\boxed{\varphi = \arg(\underline{I}_0) = -\arctan \dfrac{L\omega}{R}.}$

Variante avec le circuit RC série :
1- et 2- sont identiques.
3- devient :

$$\begin{aligned}\underline{e} &= \underline{u}_R + \underline{u}_C\\ &= \underline{Z}_R \underline{i} + \underline{Z}_C \underline{i}\\ &= R\underline{i} + \frac{1}{jC\omega}\underline{i}\\ &= \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{i}.\end{aligned}$$

On a donc

$$E_0 \exp j\omega t = \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{I}_0 \exp^{j\omega t}.$$

On simplifie les exponentielle et on isole $\boxed{\underline{I}_0 = \dfrac{E_0}{R + \dfrac{1}{jC\omega}}.}$

4- il faut prendre le module et l'argument. Il est plus simple de multiplier par $jC\omega$ en haut et en bas : $\underline{I}_0 = \dfrac{E_0 jC\omega}{jRC\omega + 1}$.
Alors : $I_0 = |\underline{I}_0| = \dfrac{E_0 C\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$,
et $\varphi = \arg \underline{I}_0 = \dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{RC\omega}{1}$.

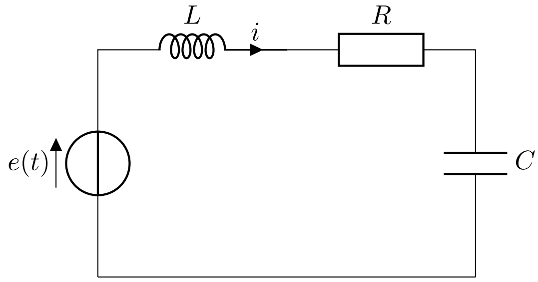
Exercice C5 – Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes

On considère à nouveau un circuit RL série alimenté par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On peut montrer que l'équation différentielle suivie par le courant $i(t)$ est $e(t) = L\dfrac{di}{dt} + Ri$.

1 - En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}_0$ de $i(t)$ en fonction de E_0, R, L, et ω.

Exercice C6 – Résonance en intensité dans le circuit RLC série

On considère un circuit RLC série, alimenté par un générateur idéal délivrant une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On s'intéresse ici au courant $i(t)$.



1 - Par une étude asymptotique, donner la valeur du courant pour $\omega \simeq 0$, puis pour $\omega \to \infty$.

2 - On cherche $i(t)$ sous la forme $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$.
Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?

3 - Donner l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit.

4 - Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}_0$ de i en fonction de R, L, C, E_0 et ω.
Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique $\underline{I}_0 = \dfrac{E_0/R}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$, en introduisant la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q, et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.
On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.

5 - En déduire l'expression de l'amplitude I_0 du courant en fonction de x. Tracer l'allure de la courbe $I_0 = f(x)$.
Pour quelle pulsation la résonance en intensité a-t-elle lieu ?

Méthodes et outils

Relations utiles

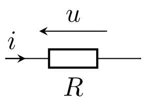
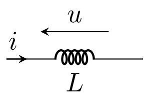
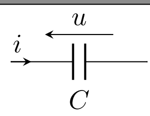
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = -1 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = \mathrm{j} \qquad \text{(se retrouve avec } \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta\text{)}$$

$$\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x) \qquad \sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

Récapitulatif sur les dipôles

Propriété	Résistance	Bobine	Condensateur
Symbole normalisé			
Loi de comportement	$u = Ri$	$u = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $q = Cu$
Loi de comportement en représentation complexe	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{U} = \mathrm{j}L\omega\underline{I}$	$\underline{U} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{I}$
Impédance complexe $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ en RSF	$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_L} = \mathrm{j}L\omega$	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$
Dipôle équivalent en basses fréquences ($\omega \sim 0$)	Résistance R	Fil	Interrupteur ouvert
Dipôle équivalent en hautes fréquences ($\omega \to +\infty$)	Résistance R	Interrupteur ouvert	Fil
Puissance reçue $P = ui$	$P = Ri^2 = u^2/R$		
Énergie stockée	aucune	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$E = \frac{1}{2}Cu^2$
Grandeur physique nécessairement continue	aucune	i	u

Cours

I – Introduction

1 – Qu'est-ce que le régime sinusoïdal forcé ?

a/ Régime sinusoïdal forcé

Définition : Régime sinusoïdal forcé (RSF)

Un système est en régime sinusoïdal forcé lorsque son entrée $e(t)$ est imposée ("forcée"), et du type sinusoïdal :

$$e(t) = e_0\,\cos(\omega t + \varphi_e).$$

Deux exemples : circuit RLC, masse-ressort.

b/ Systèmes linéaires invariants

Rappel : SLI

Un système linéaire invariant (SLI) est un système dont l'évolution est décrite par des équations différentielles **linéaires** à coefficients **constants**. Son **ordre** est donné par l'ordre de l'équation différentielle.

Soit $e(t)$ un signal d'entrée, et $s(t)$ le signal de sortie associé. On note ceci : $e(t) \xrightarrow{\text{sys}} s(t)$. C'est $s(t)$ qu'on étudie.

Propriétés des SLI

- **Linéarité :** si on a $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$ et $e_2(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_2(t)$, alors on aura aussi : $e_1(t) + e_2(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t) + s_2(t)$, et on aura pour tout réel k : $k\,e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} k\,s_1(t)$.
- **Invariance :** si lors d'une expérience on a $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$, alors on aura encore $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$ si l'on vient refaire l'expérience plus tard.

$\rightsquigarrow_1$ Les circuits électroniques composés de résistances, de bobines et de condensateurs sont linéaires. À votre avis, pourquoi ?
À cause des relations qui caractérisent ces dipôles : $u = Ri$, $u = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, $i = C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, qui donnent nécessairement lieu à des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

$\rightsquigarrow_2$ Quel exemple de composant peut faire qu'un système électronique n'est pas linéaire ?
Par exemple une diode.

c/ Propriété fondamentale

Propriété des SLI en RSF

Si le signal d'entrée est sinusoïdal alors le signal de sortie l'est également, **avec la même pulsation** :

$$\boxed{e(t) = e_0\,\cos(\omega t + \varphi_e) \quad \xrightarrow{\text{sys}} \quad s(t) = s_0\,\cos(\omega t + \varphi_s).} \tag{1}$$

$\Rightarrow$ La pulsation de sortie est la même que celle d'entrée. Mais l'amplitude s_0 et la phase à l'origine φ_s sont différentes.

$\Rightarrow$ L'objectif de ce chapitre est d'étudier les outils qui permettent de déterminer s_0 et φ_s.

Remarque : Cette propriété provient essentiellement du fait que lorsque l'on dérive ou intègre une fonction cos, on trouve une fonction $-\sin$ de même pulsation (donc un cosinus puisque $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$), donc on ne change pas de type de fonction par dérivation ou intégration.

d/ Intérêt de l'étude de la réponse à une excitation harmonique

On décompose le signal d'entrée en somme de signaux harmoniques (cf chapitre 4.0).

Par linéarité on a donc :

$$\boxed{e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad \xrightarrow{\text{sys}} \quad s(t) = c_0' + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n' \cos(n\omega_0 t + \varphi_n').} \tag{2}$$

(c'est le cas d'un signal périodique, pour un signal quelconque la somme devient une intégrale)

$\Rightarrow$ Ce chapitre permettra donc de savoir quelles harmoniques sont amplifiées, atténuées, déphasées...

2 – Passage du régime transitoire au régime sinusoïdal forcé

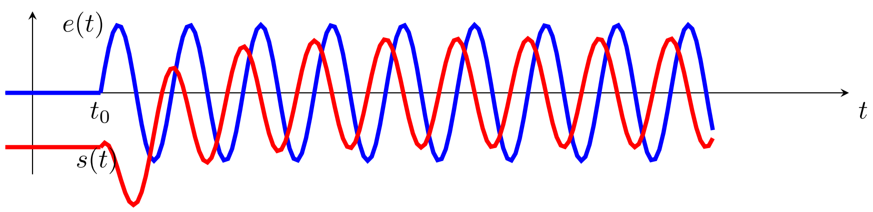
Le critère porte sur la sortie $s(t)$.

- **Régime permanent :** lorsque la sortie d'un système a atteint une valeur constante, ou lorsque qu'elle a atteint un régime périodique.
- **Régime transitoire :** lorsque la sortie d'un système évolue, pendant un certain temps, entre deux régimes permanents.

Le critère porte sur l'entrée $e(t)$.

- **Régime forcé :** lorsque l'entrée du système est maintenue à une valeur non nulle. Cette valeur peut être constante, peut être harmonique (on parle alors de régime sinusoïdal forcé, RSF), ou peut être une fonction périodique (un créneau par exemple).
- **Régime libre :** lorsque le système n'est alimenté par aucune source d'énergie. Donc lorsque l'entrée du système est nulle ou devient nulle : $e(t) = 0$.

$\rightsquigarrow_3$ Mettre en évidence les régimes permanent, transitoire, libre ou forcé.



$\Rightarrow$ Mathématiquement :

- le régime transitoire correspond à la solution homogène $s_H(t)$, qui décroit exponentiellement au bout de quelques τ ;
- le régime permanent correspond à la solution particulière $s_p(t)$ qui, en RSF, est du type sinusoïdale.

$\Rightarrow$ Dans ce chapitre, nous supposons que le régime transitoire est terminé et nous étudions uniquement le régime permanent sinusoïdal. Nous ne nous intéressons donc pas aux conditions initiales.

II – Représentation complexe d'un signal

1 – Définitions

Représentation complexe

Soit un signal $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

$X_0 > 0$ est l'amplitude du signal.

Le signal complexe associé est

$$\underline{x}(t) = X_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$$

Autre écriture : $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, donc

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{X}_0 = X_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \quad \text{l'amplitude complexe du signal.}$$

Notation : les grandeurs complexes sont soulignées.

⋆ Module et argument

- Module de l'amplitude complexe : $|\underline{X}_0| = X_0$, donne l'amplitude du signal réel.

- Argument de l'amplitude complexe : $\arg(\underline{X}_0) = \varphi$, donne la phase à l'origine du signal réel.

$\Rightarrow$ l'amplitude complexe $\underline{X}_0$ contient toute l'information sur le signal réel.

⋆ Lien avec le signal réel

Le signal complexe "n'existe pas", c'est un outil.
Sa partie réelle redonne $x(t)$:

$\mathrm{Re}(\underline{x}(t)) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) = x(t)$

$\rightsquigarrow_4$ Faire l'**EC1**.

2 – Propriétés

Attention : on étudie des signaux **synchrones**, c'est-à-dire qui ont tous la **même pulsation** ω.

- **Les amplitudes complexes s'ajoutent :**
  $x_1(t) = X_{10} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = X_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$ ont pour amplitudes complexes : $\underline{X}_{10} = X_{10}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$ et $\underline{X}_{20} = X_{20}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$.

  Alors $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ a pour amplitude complexe : $\underline{X}_0 = \underline{X}_{10} + \underline{X}_{20} = ...$

  On peut en déduire l'amplitude et la phase à l'origine de $x(t)$ en calculant $|\underline{X}_0| = |\underline{X}_{10} + \underline{X}_{20}|$ et $\arg(\underline{X}_0) = \arg(\underline{X}_{10} + \underline{X}_{20})$.

- **Dérivation par rapport au temps :** dériver revient à multiplier par jω.
  $$\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{X}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{j}\omega \times \underline{X}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega\, \underline{x}(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\underline{x}}(t) = \mathrm{j}\omega\, \underline{x}(t)}$$

- **Intégration par rapport au temps :** intégrer revient à diviser par jω.
  $\underline{x}(t) = \underline{X}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, primitive : $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} \underline{X}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\, \underline{x}(t)$

Exemple : avec la loi de comportement d'une inductance :

$$u_L = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ donc } \underline{u}_L = L \frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = L\, \mathrm{j}\omega \underline{i}.$$

III – Circuits électriques en RSF

1 – Impédance complexe des dipôles

a/ Définition et loi d'Ohm généralisée

Soit un dipôle en convention récepteur.

$$\begin{cases} u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases} \xrightarrow[\text{complexe}]{\text{représentation}}$$

Définition : impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}, \text{ unité : ohm.}$$

Propriétés

On a donc : $\underline{Z} = \dfrac{U_0}{I_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)}$.
Ainsi :

- Le module donne le rapport des amplitudes : $|\underline{Z}| = \dfrac{U_0}{I_0}$ $[\Omega]$.
- L'argument donne le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$: $\arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$; positif si $u(t)$ en avance par rapport à $i(t)$.

On a la **loi d'Ohm généralisée**, pour tout dipôle : $\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)$, et donc aussi $\underline{U}_0 = \underline{Z}\,\underline{I}_0$.

Remarque :

- On peut décomposer $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\,X$.
  - La partie réelle R donne la résistance du dipôle. Positive pour un dipôle passif.
  - La partie imaginaire X est appelée la réactance. $X > 0 \Rightarrow$ dipôle inductif ; $X < 0 \Rightarrow$ dipôle capacitif.
- On définit $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$ l'admittance complexe du dipôle. Unité : Ω^{-1} ou siemens ($1\,\mathrm{S} = 1\,\Omega^{-1}$).

b/ Exemples : résistance, inductance, capacité

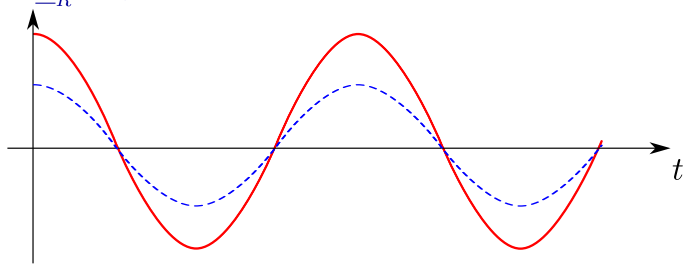
⋆ Résistance

$\rightsquigarrow_5$ Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

$u = Ri$, donc en complexes $\underline{u} = R\,\underline{i}$. On identifie donc que $\underline{Z}_R = R$.

$\rightsquigarrow_6$ $\underline{Z}$ est réel, quelle conséquence sur le déphasage ?

Déphasage $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}_R) = 0$ car réel, donc u et i sont en phase.



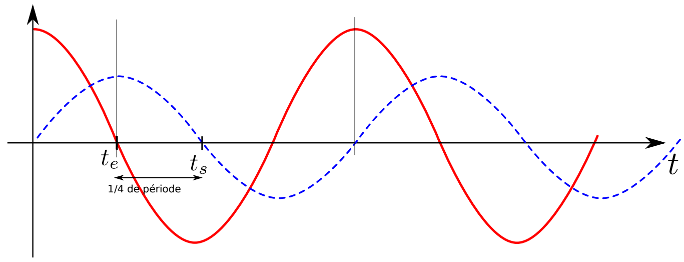
⋆ Inductance

$\rightsquigarrow_7$ Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, donc en complexes $\underline{u} = L\,\mathrm{j}\omega\underline{i}$. On identifie donc que $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$.

$\rightsquigarrow_8$ Que vaut l'argument de $\underline{Z}$? Qu'en déduire sur le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$? Identifier les courbes ci-contre.

Déphasage $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}_L) = \pi/2$, donc u et i sont en quadrature, avec u en avance. La courbe en trait plein est donc $u(t)$.



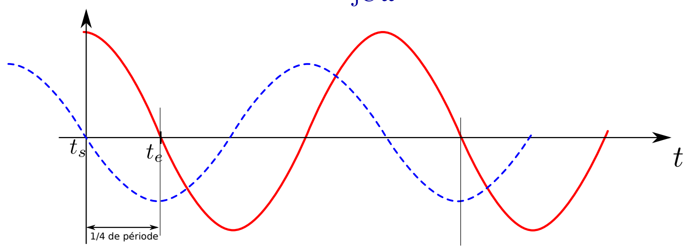
⋆ Capacité

$\rightsquigarrow_9$ Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, donc en complexes $\underline{i} = C\,\mathrm{j}\omega\underline{u}$, donc $\underline{u} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{i}$. On identifie donc que $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$.

$\rightsquigarrow_{10}$ Que vaut l'argument de $\underline{Z}$? Qu'en déduire sur le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$? Identifier les courbes ci-contre.

Déphasage $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}_C) = -\pi/2$, donc u et i sont en quadrature, avec u en retard. La courbe en trait plein est donc $u(t)$.



c/ Comportements en basses et hautes fréquences

Hautes fréquences signifie que $\omega \to +\infty$.
Basses fréquences signifie que $\omega \to 0$. Le régime permanent continu en est un cas particulier, puisqu'alors $\omega = 0$.

⋆ Bobine

$\rightsquigarrow_{11}$ Écrire l'expression de l'impédance complexe. Prendre la limite lorsque $\omega \to 0$ ou $+\infty$. En déduire le dipôle équivalent.

- Basses fréquences : $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$ tend vers 0 lorsque $\omega \to 0$, donc comportement analogue à un fil.

- Hautes fréquences : $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$ tend vers ∞ lorsque $\omega \to \infty$, donc comportement analogue à un interrupteur ouvert.

⋆ Condensateur

$\rightsquigarrow_{12}$ Écrire l'expression de l'impédance complexe. Prendre la limite lorsque $\omega \to 0$ ou $+\infty$. En déduire le dipôle équivalent.

- Basses fréquences : $\underline{Z}_C = 1/(\mathrm{j}C\omega)$ tend vers ∞ lorsque $\omega \to 0$, donc comportement analogue à un interrupteur ouvert.

- Hautes fréquences : $\underline{Z}_C = 1/(\mathrm{j}C\omega)$ tend vers 0 lorsque $\omega \to \infty$, donc comportement analogue à un fil.

2 – Lois de Kirchhoff généralisées

a/ Associations de dipôles linéaires

La loi d'Ohm $\underline{u} = \underline{Zi}$ fait que les résultats vus pour les associations de résistances se généralisent aux associations d'impédances :

- Association série :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

- Association parallèle :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$ si seulement deux impédances en parallèle (si plus, utiliser la formule avec la somme des inverses).

Cas particuliers :

- Des inductances en série s'ajoutent :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \mathrm{j}L_1\omega + \mathrm{j}L_2\omega = \mathrm{j}(L_1 + L_2)\omega$$

- Des capacités en parallèle s'ajoutent :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} \times \frac{1}{\mathrm{j}C_2\omega}}{\frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} + \frac{1}{\mathrm{j}C_2\omega}} = \frac{1}{\mathrm{j}(C_1 + C_2)\omega}$$

$\rightsquigarrow_{13}$ **EC2**

b/ Lois générales pour les circuits linéaires en RSF

La loi des mailles et la loi des nœuds sont encore valable en RSF entre les grandeurs complexes, ou entre les amplitudes complexes.

Les relations comme les diviseurs de tension et de courant sont donc aussi valables.

3 – Exemple d'étude de circuit

Savoir mener une étude en régime asymptotique $\rightsquigarrow_{14}$ **EC3**
Savoir obtenir la solution complexe en utilisant les impédances complexes $\rightsquigarrow_{15}$ **EC4**
Autre méthode : obtenir la solution complexe en passant par l'équation différentielle en notations réelles $\rightsquigarrow_{16}$ **EC5**

IV – Étude de la résonance d'un oscillateur forcé

1 – Le phénomène de résonance

Définition : Résonance

Soit un système dont l'entrée est forcée par un signal harmonique de pulsation ω.

Il y a **résonance** si, pour une valeur particulière de ω (appelée pulsation de résonance), une des grandeurs du système **oscille avec une amplitude très importante**.

Mathématiquement : résonance $\Leftrightarrow$ l'amplitude $U(\omega)$ possède un maximum local (autre qu'en $\omega = 0$).

Propriétés

Pour une situation donnée, il faudra distinguer **trois pulsations** :

- **La pulsation propre** du système, ω_0.
  C'est la pulsation à laquelle il oscille s'il est abandonné sans contrainte.
  Par exemple pour le système masse-ressort : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ou pour le circuit RLC : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- **La pulsation du forçage**, ω, à laquelle on force le système à évoluer.
- L'éventuelle **pulsation de résonance**, ω_r, qui correspond à une pulsation de forçage pour laquelle la réponse est forte.

En général, la résonance a lieu lorsque le système est forcé à sa pulsation propre ou presque : $\boxed{\omega_r \simeq \omega_0.}$

Elle est d'autant plus forte que le facteur de qualité Q est grand.

L'idée physique de la résonance est que lorsqu'on force le système à sa fréquence propre, l'énergie qu'on lui transmet est toujours apportée en phase, et augmente sans cesse.

Exemple : Lorsque l'on fait de la balançoire, on pousse toujours au bon moment pour que l'amplitude des oscillations augmente.

Il y a ensuite des mécanismes qui modèrent cette augmentation : non-linéarités ou phénomènes de dissipation.

Ainsi, une résonance sera d'autant plus forte que le facteur de qualité du système sera grand (peu de dissipation).

Des exemples de phénomènes de résonance (pas à connaître) :

- La caisse de résonance d'un instrument de musique est - comme son nom l'indique – conçue pour que l'amplitude de l'onde sonore soit très importante en sortie.
- Une montre à quartz exploite les vibrations d'un cristal de quartz à une fréquence bien précise, sa fréquence de résonance, afin d'en compter les oscillations et de tenir le temps.
- L'amplitude importante des oscillations peut endommager le système, que ce soit une tension électrique trop importante ou des vibrations mécaniques trop importantes. Voiture ou vélo sur une route oscillant régulièrement, marcheurs sur un pont, vibrations provoquées par un séisme : si la fréquence de ces excitations coïncide avec celle de résonance du système, il peut y avoir destruction. Cf vidéo.
- Les marées sont aussi d'amplitude plus ou moins forte en fonction de résonances entre le forçage (Soleil et Lune, période de $\simeq$24 h), et la période propre des oscillations de l'eau au lieu considéré.

Définition : bande passante

La bande passante est l'ensemble des pulsations qui ne sont pas trop atténuées.

Les pulsations de coupures sont les pulsations qui délimitent la bande passante.
Par convention, ce sont celles pour lesquelles l'amplitude U_0 de la grandeur d'intérêt est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$:

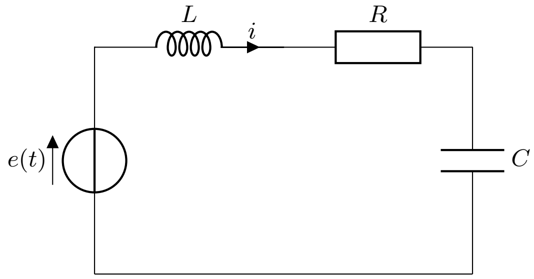
$$\omega_c \text{ est telle que } U_0(\omega_c) = \frac{U_{0\max}}{\sqrt{2}}.$$

Il y a en général deux pulsations de coupures, ω_{c1} et ω_{c2}. La largeur de la bande passante est définie comme $\Delta\omega = |\omega_{c1} - \omega_{c2}|$.

Annexe : exemples de systèmes avec résonance

Nous rencontrerons principalement deux grands types de résonance : celle dite “en intensité”, et celle dite “en tension”.
Remarque : rien n'est à connaître par cœur dans ces exemples, mais les avoir déjà rencontrés vous permettra de mieux comprendre les exercices.

Comme exemple, on considère un circuit RLC série, alimenté par un générateur idéal délivrant une tension $\boxed{e(t) = E_0 \cos(\omega t).}$



1 – Résonance en intensité

On s'intéresse au courant $i(t)$ dans le circuit RLC série. On l'écrit $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

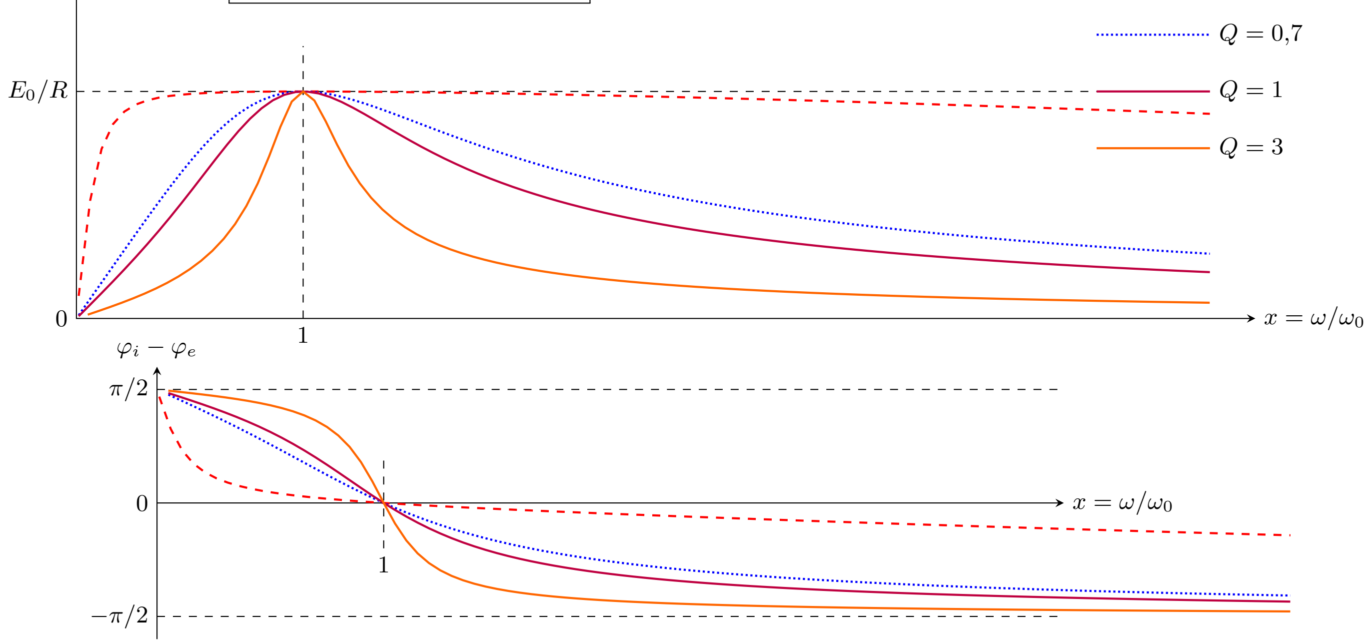
$\rightsquigarrow_{17}$ Cf **EC6** et TD II.

$\star$ **Bilan :** l'amplitude complexe du courant s'écrit sous une forme canonique, avec $x = \omega/\omega_0$:

$$\boxed{\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

L'amplitude (réelle) et la phase à l'origine du courant sont donc :

$$\boxed{I_0 = |\underline{I}_0| = \frac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_e = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right).}$$



- La résonance a lieu si I_0 est maximal, donc en $x = 1$, donc pour $\boxed{\omega = \omega_0.}$
- Le déphasage $\Delta\varphi$ est nul à la résonance : $i(t)$ et $e(t)$ sont alors en phase.

Pour le système masse-ressort, l'étude de la vitesse $v(t) = \dot{y}(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$ mène aux mêmes relations qu'ici : c'est une résonance de type “en intensité”.

2 – Résonance en tension

⋆ La grandeur d'intérêt est cette fois la tension $u_C(t) = U_{C0}\cos(\omega t + \varphi)$.

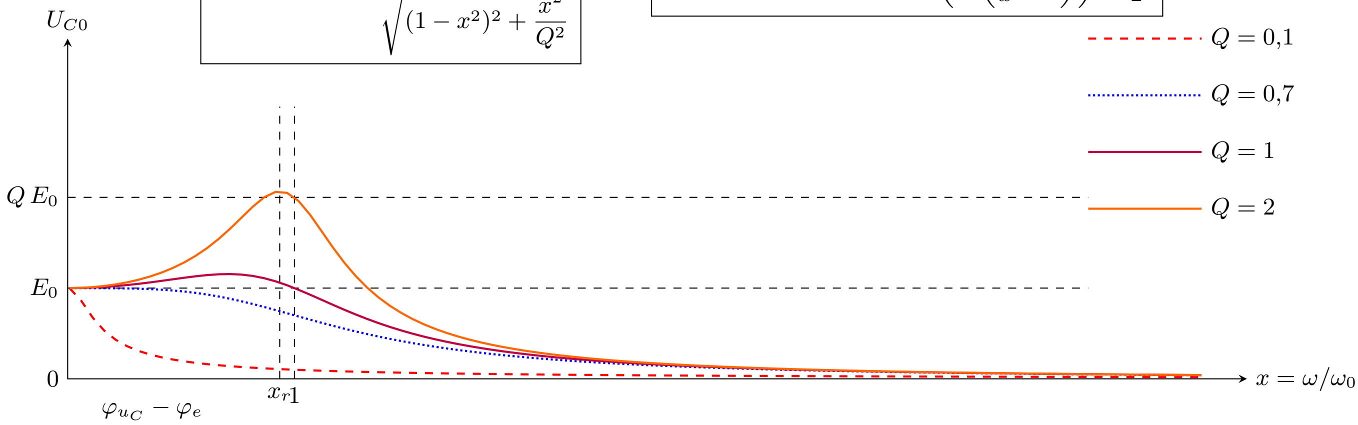
Cf TD III

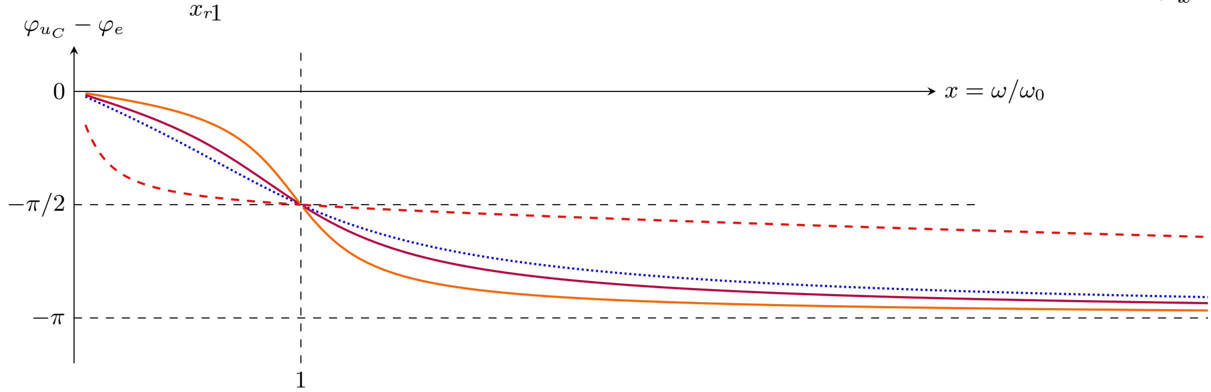
⋆ Bilan : l'amplitude complexe s'écrit sous une forme canonique :

$$\boxed{\underline{U}_{C0} = \frac{E_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\,\dfrac{x}{Q}},} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad x = \omega/\omega_0.$$

⋆ L'amplitude (réelle) et la phase à l'origine de la tension sont donc alors :

$$\boxed{U_{C0} = |\underline{U}_{C0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\varphi = \varphi_{u_C} - \varphi_e = \arctan\left(Q\left(\frac{1}{x} - x\right)\right) - \frac{\pi}{2}.}$$





- Il y a résonance si $U_{C0}(x)$ admet un maximum pour une valeur de $x \in]0, +\infty[$. L'étude montre (cf TD III) que c'est le cas seulement si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}7$, en $x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$.
- À la pulsation propre (ω_0), l'amplitude vaut Q fois l'amplitude en $x = 0$.
- Le déphasage $\Delta\varphi$ vaut $-\dfrac{\pi}{2}$ à la pulsation propre ω_0 : $u_C(t)$ et $e(t)$ sont alors en quadrature, avec $u_C(t)$ en retard sur $e(t)$.

Pour le système masse-ressort, l'étude de la position $x(t)$ mène au mêmes relations qu'ici : c'est une résonance en tension.