Systèmes linéaires
Chapitre 4.0

Correction – TD – Signaux périodiques

I Déphasage ★ | [● ○ ○]

1 - Le signal 2 passe par son maximum avant le signal 1. C'est donc le signal 2 qui est en avance sur le signal 1.

Remarque : On peut aussi vouloir dire que le signal 1 passe par son maximum avant le signal 2. Mais dans ce cas on a un écart de temps plus important que dans le cas où on considère que c'est 2 qui passe avant. Il faut donc retenir le premier cas.

2 - Mesurons d'abord la période : $T = 3\,\text{ms}$.

Pour le déphasage, on ne peut pas raisonner en repérant les passages par 0, car le signal 2 n'est pas de moyenne nulle.

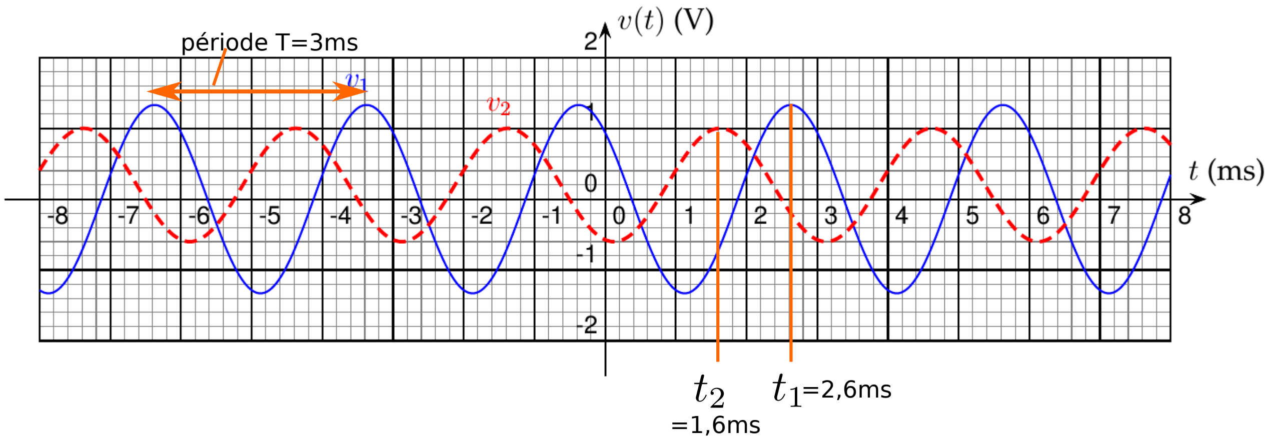
On repère donc plutôt les maximum.

On repère l'instant où v_2 est maximal, on note t_2 cet instant.

On repère l'instant le plus proche où v_1 est maximum, on le note t_1.

On a alors, pour le déphasage de v_2 par rapport à v_1 :

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_1 - t_2) = \frac{2\pi}{3}(2{,}6 - 1{,}6) = 2{,}1\,\text{rad}.$$



II Spectre d'une somme ou d'un produit

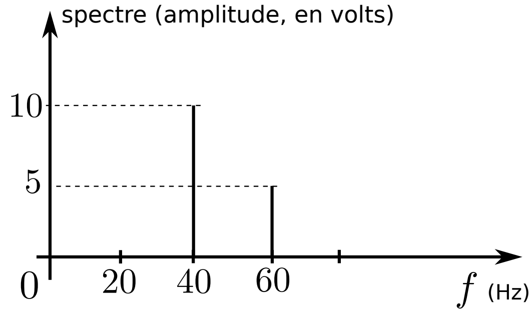
1 - a - On a $u_s(t) = U_1\cos(2\pi f_1 t) + U_2\cos(2\pi f_2 t + \varphi)$.
Il y a donc deux fréquences dans ce signal : $f_1 = 40\,\text{Hz}$ et $f_2 = 60\,\text{Hz}$. Le spectre comporte donc deux pics.

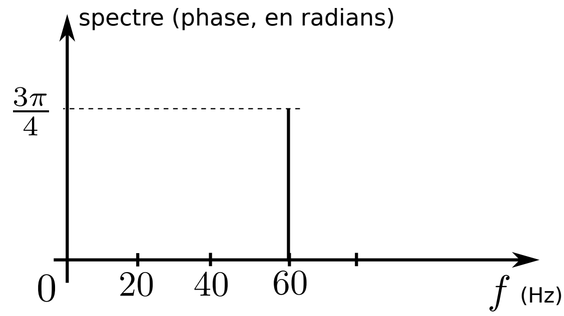
b - Le signal $u_s(t)$ est périodique car son spectre contient des pics uniquement à des fréquences multiples d'une fréquence fondamentale.

Il faut trouver cette fréquence fondamentale : on constante que $f_0 = 20\,\text{Hz}$ convient. Ainsi :

- Le fondamental a $f_0 = 20\,\text{Hz}$ est absent du signal.
- Le premier harmonique est à $f_1 = 2 \times 20 = 40\,\text{Hz}$, il est d'amplitude $10\,\text{V}$ et de phase à l'origine nulle.
- Le second harmonique est à $f_2 = 3 \times 20 = 60\,\text{Hz}$, il est d'amplitude $5\,\text{V}$ et de phase à l'origine $3\pi/4$.
- Il n'y a pas d'autres harmoniques.

Allure du spectre :





2 - a - Il faut mettre le signal sous forme de somme de cosinus afin de pouvoir identifier les fréquences. Donc :

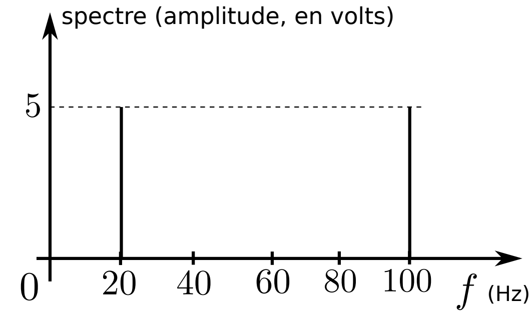
$$\begin{aligned}
u_p(t) &= kU_1U_2\, \cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t + \varphi)\\
&= \frac{kU_1U_2}{2}\, [\cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_2 t + \varphi) + \cos(2\pi f_1 t - 2\pi f_2 t - \varphi)]\\
&= \frac{kU_1U_2}{2}\, [\cos(2\pi (f_1 + f_2) t + \varphi) + \cos(2\pi (f_1 - f_2) t - \varphi)]\,.
\end{aligned}$$

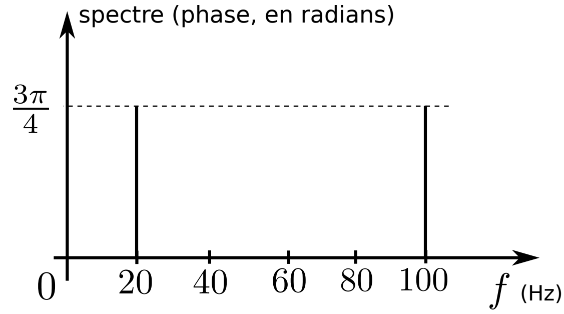
On identifie donc une fréquence à $f_1 + f_2 = 100\,\text{Hz}$, et une à $f_1 - f_2 = -20\,\text{Hz}$. Problème ! une fréquence négative n'existe pas vraiment. On utilise donc le fait que $\cos(x) = \cos(-x)$ pour écrire :

$$u_p(t) = \frac{kU_1U_2}{2}\, [\cos(2\pi (f_1 + f_2) t + \varphi) + \cos(2\pi (f_2 - f_1) t + \varphi)]\,.$$

Les fréquences sont donc $f_1 + f_2 = 100\,\text{Hz}$, et une à $f_2 - f_1 = 20\,\text{Hz}$.

b - Allure du spectre :

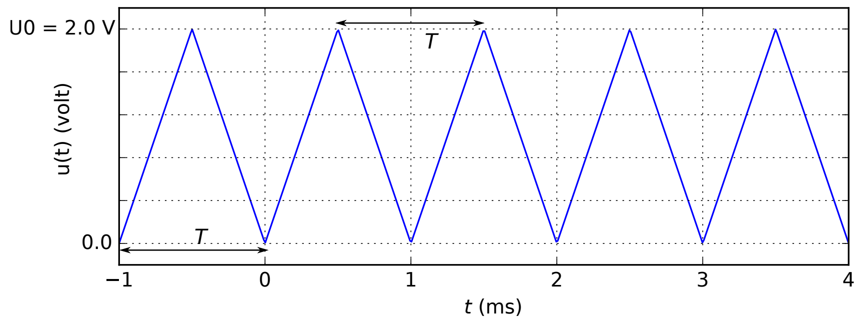




Remarque : Les amplitudes de chaque pic sont bien $kU_1U_2/2 = 5\,\text{V}$.

III Étude d'un signal triangle

1 - Tracé ci-dessous :



Remarque : la fréquence est $\boxed{f = \dfrac{1}{T} = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{Hz} = 1{,}0\,\mathrm{kHz}.}$

La pulsation est $\boxed{\omega = 2\pi f = 6{,}3 \times 10^3\,\mathrm{rad/s}.}$

L'amplitude crête à crête est $\boxed{U_{\text{cr-cr}} = 2{,}0\,\mathrm{V}.}$

2 - Le signal est symétrique par rapport à 1 V, donc sa valeur moyenne sera de 1 V.

Complément : confirmons ceci en calculant $\langle u(t)\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle u(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} u(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} u(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}\left(2U_0 - 2U_0\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il y a trois intégrales. Calculons les séparément :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\int_0^{T/2} t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T/2} \\
&= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left(\frac{T^2}{8} - 0\right) \\
&= \frac{U_0}{4}.
\end{aligned}$$

Puis la seconde :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}2U_0\int_{T/2}^{T}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}2U_0[t]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{1}{T}2U_0(T - T/2) \\
&= \frac{1}{T}2U_0\frac{T}{2} \\
&= U_0
\end{aligned}$$

Et la troisième :

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\int_{T/2}^{T} t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{T/2}^{T} \\ &= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left(\frac{T^2}{2}-\frac{T^2}{8}\right) \\ &= \frac{3U_0}{4}.\end{aligned}$$

Finalement on somme les trois :

$$\langle u(t)\rangle = \frac{U_0}{4} + U_0 - \frac{3U_0}{4}$$

$$\boxed{\langle u(t)\rangle = \frac{U_0}{2} = 1{,}0\,\mathrm{V}}$$

Remarque : Vu que l'intégrale est l'aire sous la courbe, on pouvait tout de suite écrire que $\int_0^{T/2} u(t)\mathrm{d}t = \int_{T/2}^{T} u(t)\mathrm{d}t$ et simplifier le calcul.

3 - On en déduit la valeur efficace :

$$\begin{aligned}U_{\text{eff}} &= \sqrt{\langle u(t)^2\rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\frac{U_0^2}{3}}\end{aligned}$$

$$\boxed{U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}}$$

Complément : Démontrons le résultat admis dans l'énoncé. On commence par calculer :

$$\begin{aligned}\int_0^{T/2} u(t)^2\mathrm{d}t &= \int_0^{T/2}\left(2U_0\frac{t}{T}\right)^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{4U_0^2}{T^2}\int_0^{T/2} t^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{4U_0^2}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/2} \\ &= \frac{4U_0^2}{T^2}\frac{T^3}{3\times 2^3} \\ &= \frac{U_0^2 T}{6}\end{aligned}$$

Ensuite, vu que l'intégrale est l'aire sous la courbe et que cette aire va être la même entre 0 et $T/2$ qu'entre $T/2$ et T, on va avoir également $\displaystyle\int_{T/2}^{T} u(t)^2\mathrm{d}t = \frac{U_0^2 T}{6}$.

D'où le résultat annoncé dans l'énoncé en sommant les deux.

4 - Le a/ ne convient pas car la valeur moyenne est égale à 1,0 V, et non pas à 0,5 V comme donné ici par le pic à fréquence nulle.

Le b/ ne convient pas à cause de la fréquence du fondamental qui est de 2 kHz.

Le c/ convient : bonne valeur moyenne, bonne fréquence de 1 kHz du fondamental.

Le d/ ne convient pas car il serait de valeur moyenne nulle.