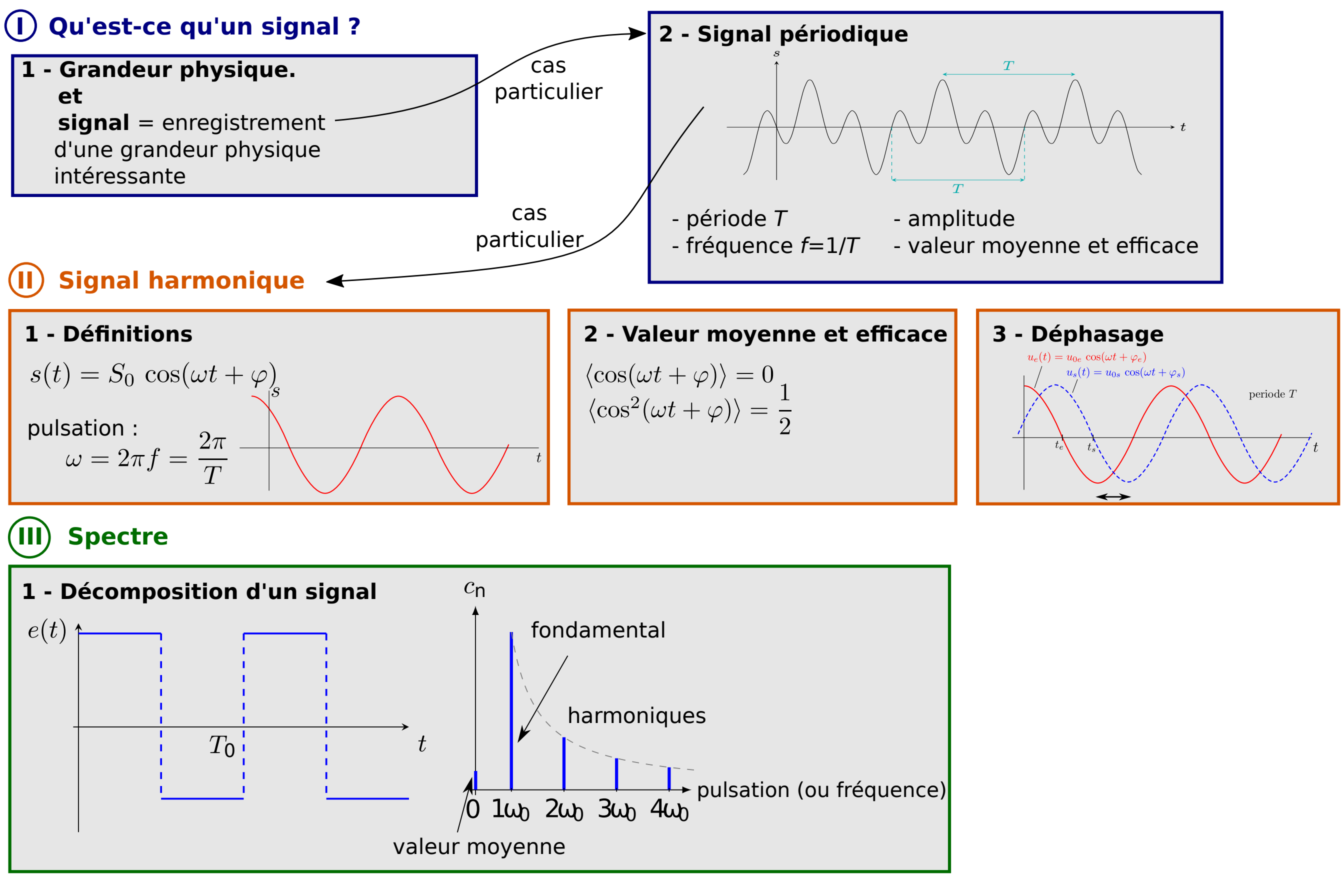
Systèmes linéaires
Chapitre 4.0

Signaux périodiques



Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

▶1 Pour un signal périodique, quelle est la relation entre la pulsation et la fréquence ? et entre la pulsation et la période ?

▶2 Quelle est la relation de définition de la valeur moyenne d'un signal périodique ?

▶3 Quelle est la relation de définition de la valeur efficace d'un signal périodique ?

——— (cours : II)

▶4 Que vaut la valeur moyenne du signal $\cos(\omega t + \varphi)$? Et la valeur moyenne de son carré ?

——— (cours : III)

▶5 Pour un signal périodique de période T_0 et fréquence propre $f_0 = 1/T_0$, décrire la structure de son spectre (fondamental, harmoniques, donner leurs fréquences).

Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I)

▶6 Calculer une valeur moyenne ou efficace sur un signal simple. → **EC1**

——— (cours : II)

▶7 Déphasage :

Reconnaître sur un tracé si un signal est en avance ou en retard par rapport à un autre.

Donner la valeur d'un déphasage étant donnée la valeur du décalage temporel entre deux signaux synchrones (donc de même période).

——— (cours : III)

▶8 Exploiter le spectre d'un signal. → **EC2**

Exercices de cours

Exercice C1 – Calculer une valeur moyenne ou efficace

1 - On considère un signal créneau de période $T = 10\,\mathrm{s}$, de valeur minimale $0\,\mathrm{V}$ et maximale $5\,\mathrm{V}$. Calculer sa valeur moyenne.

2 - Calculer $\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle$, ainsi que $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle$.

3 - Même question avec un sinus.

4 - On considère le signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Montrer que sa valeur moyenne est nulle, et que sa valeur efficace vaut $S_0/\sqrt{2}$ (en utilisant q2).

5 - Que vaut la moyenne du signal $s(t) = 3 + 8\cos(\omega t + \pi/2)$ (sans refaire de calcul d'intégrale) ?

On donne : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

Correction :

1 - Il faut trouver 2,5 V.

2 - $\star$ Calcul de $\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)\right]_0^T \\
&= \frac{1}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)\right) \\
&= \frac{1}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\star$ Calcul de $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle$.

Il faut d'abord trouver la période en fonction de ω. Pour l'obtenir on peut se débarrasser du carré en utilisant la formule

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1, \quad \text{soit donc} \quad \cos^2 x = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
s(t) &= \frac{\cos[2(\omega t + \varphi)]}{2} + \frac{1}{2}, \\
&= \frac{1}{2}\cos[2\omega t + 2\varphi] + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Calculons ensuite la valeur moyenne :

$$\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\frac{1}{2}\int_0^T \cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\frac{1}{2}\int_0^T\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin[2\omega t+2\varphi]\right]_0^T+\frac{1}{2T}(T-0)\\
&= \frac{1}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\sin[\underbrace{2\omega T}_{=2\pi}+2\varphi]-\sin(2\varphi)\right)+\frac{1T}{2T}\\
&= \frac{1}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\underbrace{\sin[2\pi+2\varphi]}_{=\sin(2\varphi)}-\sin(2\varphi)\right)+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3 - $\star$ Calcul de $\langle\sin(\omega t+\varphi)\rangle$.

Période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)\right]_0^T\\
&= -\frac{1}{T}\frac{1}{\omega}\left(\cos(\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+\varphi)-\cos(\varphi)\right)\\
&= -\frac{1}{T}\frac{1}{\omega}\left(\underbrace{\cos(2\pi+\varphi)}_{=\cos\varphi}-\cos(\varphi)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\star$ Calcul de $\langle\sin^2(\omega t+\varphi)\rangle$.

On utilise :

$$\cos(2x)=1-2\sin^2 x,\quad \text{soit donc}\quad \sin^2 x=-\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
s(t) &= -\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2}+\frac{1}{2},\\
&= -\frac{1}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi}{\omega}$.

Pour la valeur moyenne on reprend presque exactement les calculs du 2, à un signe moins près mais sans importante car en facteur du terme nul. On a donc $\langle\sin^2(\omega t+\varphi)\rangle=\dfrac{1}{2}$.

4 - $s(t)=S_0\cos(\omega t+\varphi)$. On va réutiliser les résultats de la question précédente (qui sont à connaître).

Moyenne : $\langle S_0\cos(\omega t+\varphi)\rangle=S_0\langle\cos(\omega t+\varphi)\rangle=0$.

Valeur efficace : calculons d'abord $\langle(S_0\cos(\omega t+\varphi))^2\rangle=S_0^2\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\rangle=\dfrac{S_0^2}{2}$.

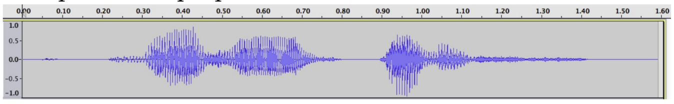
Puis on prend la racine pour obtenir $S_{\text{eff}}=\dfrac{S_0}{\sqrt{2}}$.

5 - $\langle s(t)\rangle = \langle 3 + 8\cos(\omega t + \pi/2)\rangle = \langle 3\rangle + \langle 8\cos(\omega t + \pi/2)\rangle = 3.$

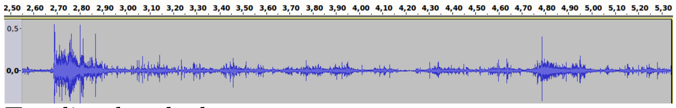
Exercice C2 – Exploiter le spectre d'un signal

On donne ci-dessous les chronogrammes de quatre signaux sonores : L'axe des abscisses est gradué en secondes.

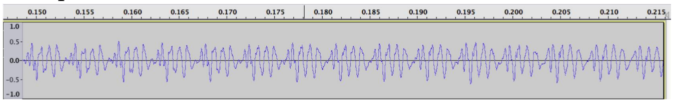
Une personne qui parle :



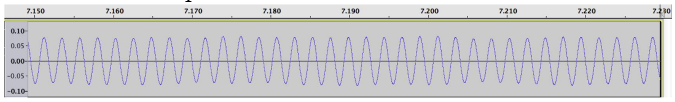
Papier froissé :



Saxophone :

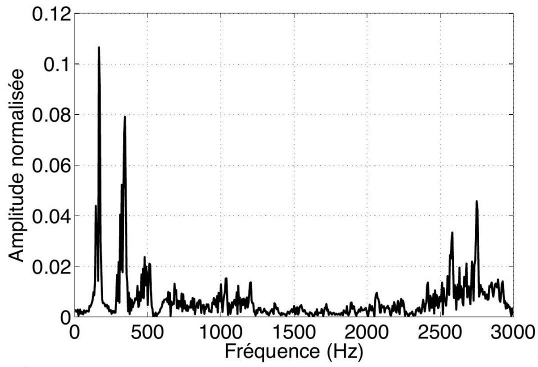


Tonalité de téléphone :

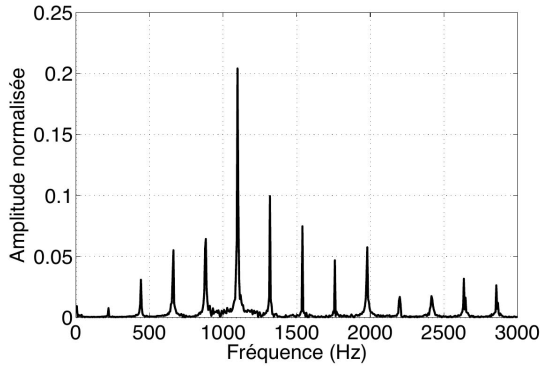


On donne ensuite les spectres de ces quatre signaux.

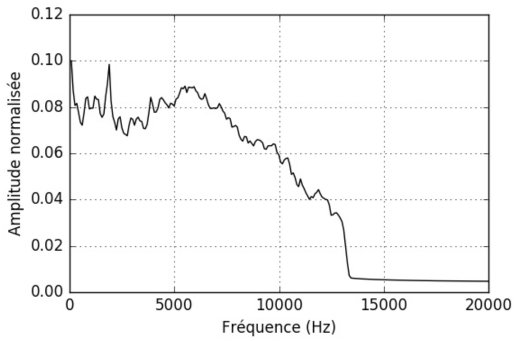
Personne qui parle :



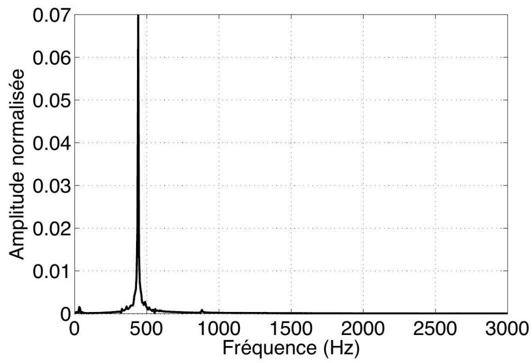
... :



Papier froissé :



... :



(Source : Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr)

1 - Compléter l'identification en attribuant le bon signal au saxophone et à la tonalité de téléphone.

2 - Quelle est la fréquence de la note jouée par le saxophone ? Et celle de la tonalité du téléphone ?

3 - Que dire des pics à basse fréquence sur le signal parlé ?

Correction :

1 - Tonalité de téléphone : en bas à droite, car on voit sur l'enregistrement que le signal semble sinusoïdal (donc il n'y a que le fondamental dans le spectre).

Saxophone : en haut à droite. Le signal n'est pas purement sinusoïdal, donc il y a présence d'harmoniques.

2 - Fréquence de la note jouée par le saxophone : le fondamental est à 250 Hz.

Téléphone : à 400 Hz environ.

On retrouve bien ce qu'on peut mesurer sur les enregistrements temporels : saxophone $T = 4{,}5\,\text{ms}$ d'où $f = 1/T = 222\,\text{Hz}$; téléphone $T = 2{,}3\,\text{ms}$ et donc $f = 433\,\text{Hz}$.

3 - Les pics à basse fréquence sur le signal parlé correspondent aux fréquences naturelles de la voix humaines (cordes vocales qui vibrent).

Le cours

I – Qu'est-ce qu'un signal ?

1 – Grandeur physique et signal

Définition

Grandeur physique : c'est une propriété d'un phénomène, d'un évènement, d'un corps, que l'on peut exprimer par une mesure.

Exemples : la position, la vitesse, la pression, la température, la masse, la charge électrique, une force, etc.

Définition

Signal : il s'agit de l'enregistrement d'une grandeur physique intéressante.

2 – Cas particulier : le signal périodique

a/ Définition, période, fréquence et amplitudes

Définition

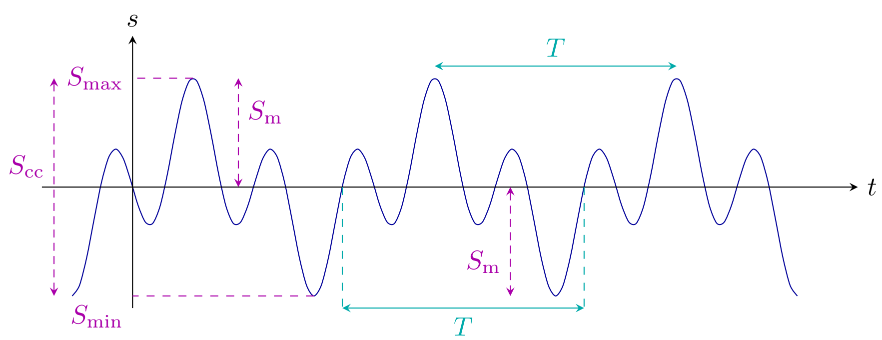
Signal périodique : Un signal est périodique s'il se répète au bout d'un temps T.

Période T : Il s'agit du plus petit temps tel que $s(t+T) = s(t)$. Unité S.I. : seconde.

Fréquence : $\boxed{f = \frac{1}{T}.}$ Donne le nombre de répétitions du signal par unité de temps. Unité S.I. : s^{-1} ou Hz (hertz).

Les grandeurs suivantes permettent de caractériser l'amplitude d'un signal périodique :

- Les valeurs minimale $S_{\min}$ et maximale $S_{\max}$.
- La valeur crête à crête $S_{cc} = S_{\max} - S_{\min}$.
- L'amplitude S_m dans le cas où le signal est symétrique.



c/ Valeur moyenne

Considérons le signal périodique ci-contre.

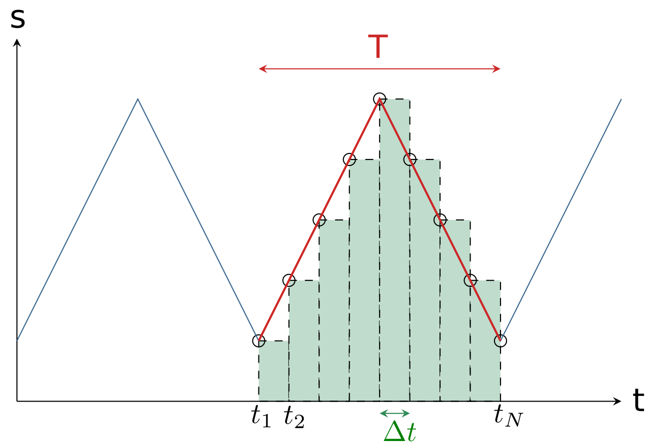
Sa valeur moyenne est égale à la valeur moyenne sur une période.

On peut la calculer de manière approchée en considérant des instants t_1, t_2, ..., t_N comme sur la figure ci-contre.

La valeur moyenne vaut alors :

$$\langle s(t) \rangle \simeq \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} s(t_i).$$

(on fait simplement la moyenne des points ; on ne compte pas $s(t_N)$ car il compte pour la période suivante).



On comprend bien que plus on prend un nombre N de points grand, plus on aura une approximation précise de ce qu'est la valeur moyenne. En fait, pour avoir la valeur exacte, il faut que $N \to +\infty$, et nous allons voir que ceci fait apparaître une intégrale.

Faisons pour cela quelques manipulations. On introduit d'abord l'écart Δt :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{(N-1)\Delta t}\sum_{i=1}^{N-1} s(t_i)\Delta t$$
$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N-1} s(t_i)\Delta t.$$

On passe ensuite à la limite où $N \to +\infty$, donc où $\Delta t \to 0$. La somme devient alors égale à l'aire sous la courbe, et est donnée par l'intégrale suivante (cf méthode des rectangles en mathématique) :

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{N} s(t_i)\Delta t = \int_{t_1}^{t_N} s(t)\mathrm{d}t.}$$

On obtient donc : $\langle s(t)\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_1}^{t_N} s(t)\mathrm{d}t.$

Finalement, on retiendra ce qui suit :

Définition

Valeur moyenne d'un signal $s(t)$ de période T :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(indépendant du choix de } t_0\text{)}$$

Propriétés

Vue la définition de la moyenne et les propriétés de l'intégrale, on a :

- $\langle s_1(t)+s_2(t)\rangle = \langle s_1(t)\rangle + \langle s_2(t)\rangle$
- Pour toute constante λ : $\langle \lambda s(t)\rangle = \lambda\langle s(t)\rangle$

Mais attention, $\langle s_1(t)\times s_2(t)\rangle \neq \langle s_1(t)\rangle \times \langle s_2(t)\rangle$!

Exemple : calcul pour un signal créneau (cf **EC1** question 1).

d/ Valeur efficace

Définition

Valeur efficace de $s(t)$:

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)^2\mathrm{d}t}.$$

Remarque :

- On l'appelle aussi valeur RMS pour "Root Mean Square".
- Si on omet la racine carrée, on parle de valeur quadratique moyenne (donc pour la quantité $\langle s(t)^2\rangle$).
- La valeur efficace intervient lorsqu'on s'intéresse à l'énergie d'un signal, car souvent il apparaît un carré. Par exemple avec l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2(t)$, alors $\langle E_c\rangle$ fait intervenir la moyenne quadratique de v.

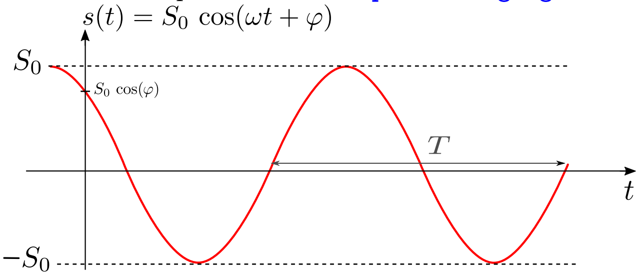
On a $\langle (s_1(t)+s_2(t))^2\rangle = \langle s_1(t)^2 + 2s_1(t)\,s_2(t) + s_2(t)^2\rangle \neq \langle s_1(t)^2\rangle + \langle s_2(t)^2\rangle$, donc les valeurs efficaces ne s'ajoutent pas !

$\to$ Faire la suite de l'**EC1**

II – Signal harmonique

1 – Définitions

Cf chapitre 2 (oscillateur harmonique). Noter les noms des paramètres sur le schéma ci-dessous. Animation permettant de faire varier les paramètres : https://www.geogebra.org/m/xvtS8qV8.



2 – Valeur moyenne et efficace

Propriétés

- $\langle\cos(\omega t + \varphi)\rangle = 0$,
- $\langle\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle = \dfrac{1}{2}$

Conséquence : pour $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$, la valeur moyenne et la valeur efficace valent :

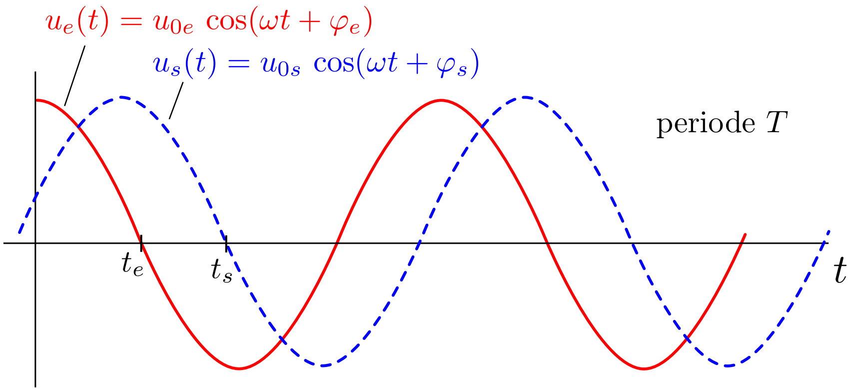
$$\langle s(t)\rangle = S_0\langle\cos(\omega t + \varphi)\rangle = 0$$

et

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2\rangle} = \sqrt{S_0^2\langle\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}.$$

3 – Déphasage entre signaux harmoniques

On considère deux signaux sinusoïdaux de même période, et donc de même pulsation ω :



Les signaux ayant même pulsation, ils sont dits **synchrones**.

Définition

Le déphasage du signal u_s par rapport au signal u_e est défini comme $\boxed{\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_e.}$

> **Méthode : mesurer un déphasage entre deux signaux**
> On repère deux instants consécutifs (les plus proches possibles) où les signaux passent par 0. On les note t_e et t_s.
> Le signal d'entrée sert de référence.
> Le déphasage entre sortie et entrée est donné par :
>
> $$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \omega(t_e - t_s)$$

Remarques :

- À la place de deux passages par 0, on peut tout aussi bien choisir deux maximum, ou deux minimum. C'est même obligatoire si les signaux ne sont pas centrés sur 0 (pas de moyenne nulle).

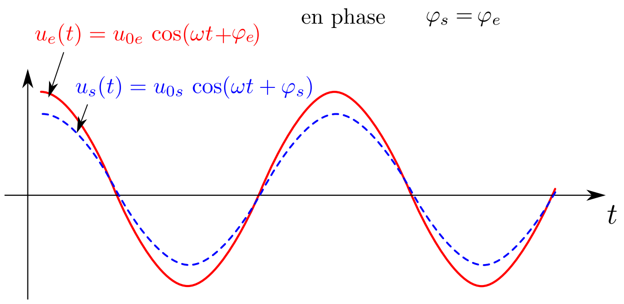
- Tout comme φ_s et φ_e, le déphasage est défini à 2π près.
- Sur l'exemple ci-dessus, la sortie est en retard sur l'entrée, car elle passe par 0 après l'entrée (t_s est après t_e).
- (chapitre à venir : $\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_e$ est aussi l'argument de la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{u_{0s}}{u_{0e}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_s-\varphi_e)}$.)

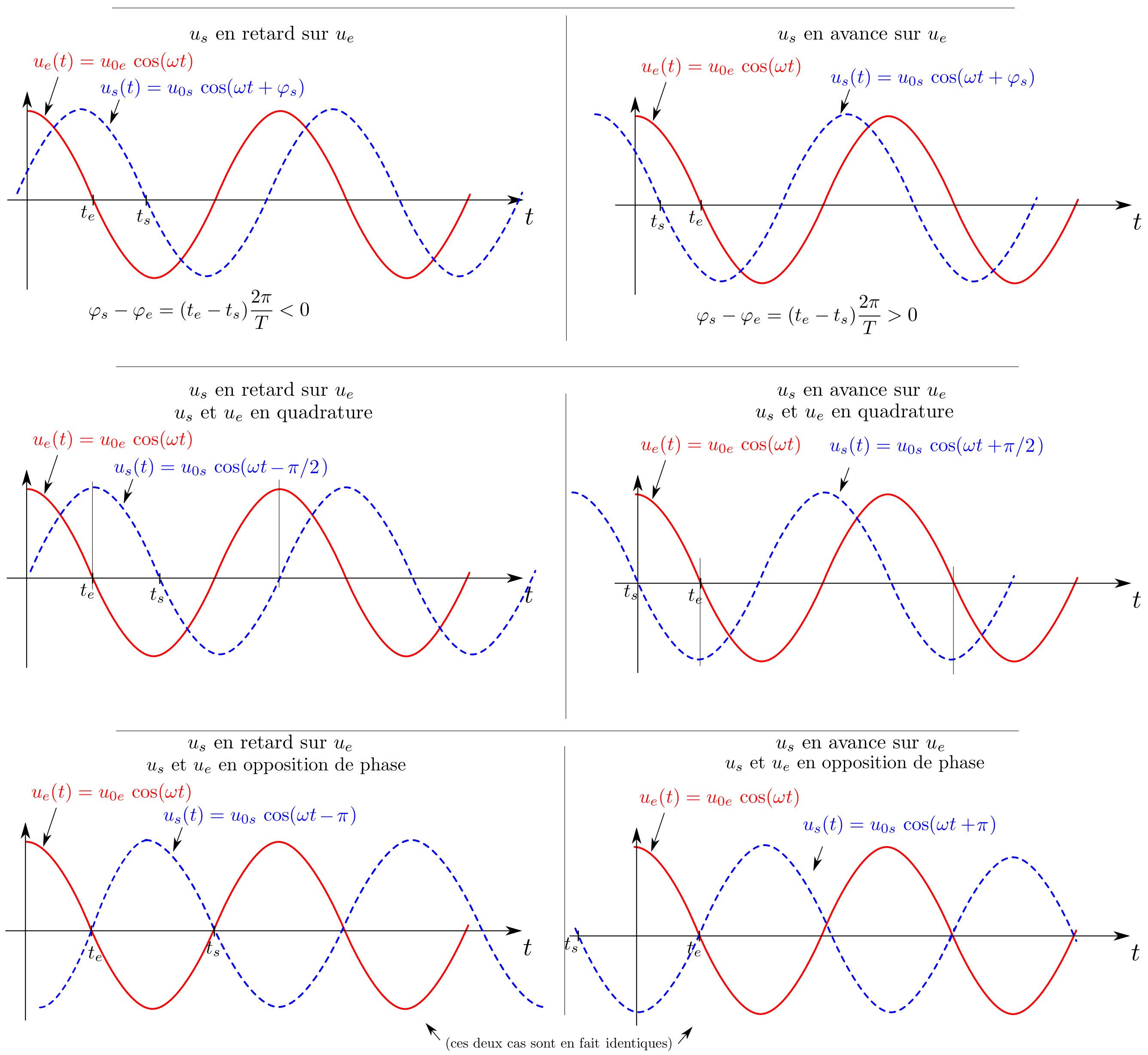
Démonstration de la méthode (pas à connaître) :
Repérons les maximum :
$u_e = u_0\cos(\omega t + \varphi_e)$ est maximal en $\omega t + \varphi_e = 0$, donc en $t_e = -\varphi_e/\omega$.
$u_s = u_0\cos(\omega t + \varphi_s)$ est maximal lorsque $\omega t + \varphi_s = 0$, donc en $t_s = -\varphi_s/\omega$.

On a donc $t_e - t_s = -\varphi_e/\omega + \varphi_s/\omega = -(\varphi_e - \varphi_s)/\omega$.

On a donc bien $\varphi_s - \varphi_e = \omega(t_e - t_s)$.

Quelques exemples particuliers :





III – Spectre

a/ Cas d'un signal périodique

Propriétés

Décomposition de Fourier : Soit $s(t)$ un signal périodique de période T, et soit $f_0 = 1/T$ sa fréquence et $\omega_0 = 2\pi f_0$ sa pulsation.
$s(t)$ se décompose comme somme de signaux harmoniques de fréquences multiples entières de f_0 :

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

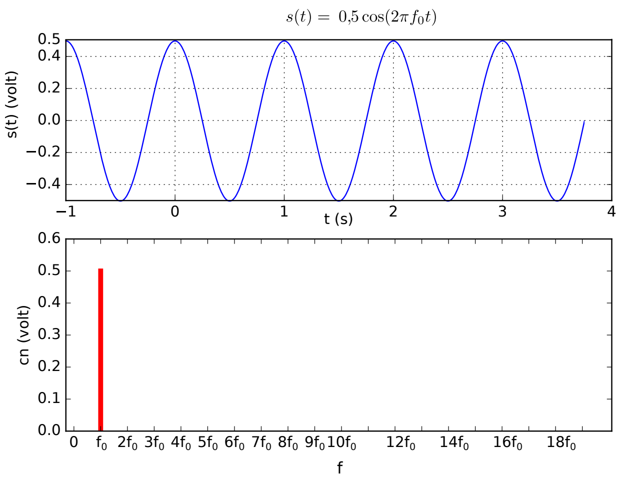
- c_0 est la **valeur moyenne** du signal, ou encore sa **composante continue** (de fréquence nulle).
- Le n-ième terme = l'**harmonique** de rang n.
  Sa pulsation est $n \times \omega_0$ (multiple entier de ω_0), sa fréquence est $n \times f_0$.
- L'harmonique $n = 1$ est de même fréquence que le signal $s(t)$, il s'agit du **fondamental**.
  ω_0 est aussi appelée pulsation fondamentale.

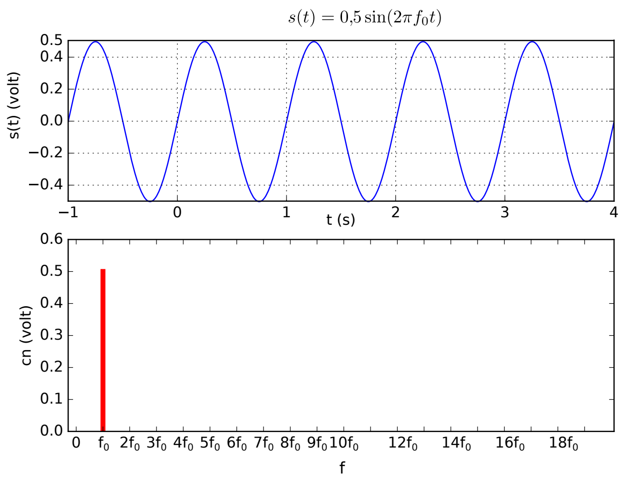
Définition

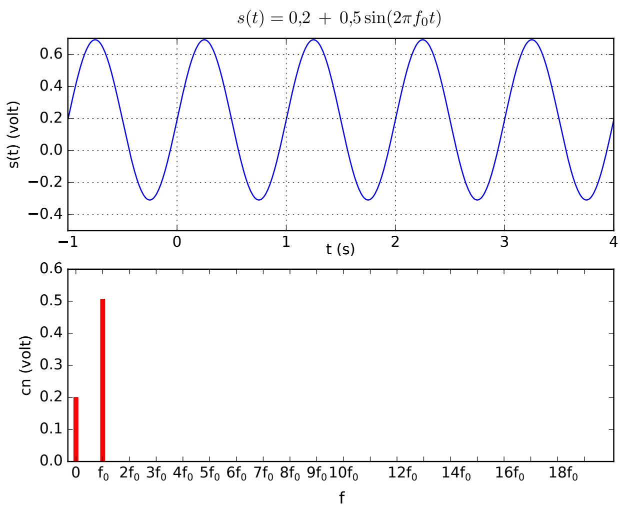
Le tracé de l'amplitude c_n de chaque composante en fonction de sa fréquence (ou de sa pulsation, ou de n) est le spectre du signal.

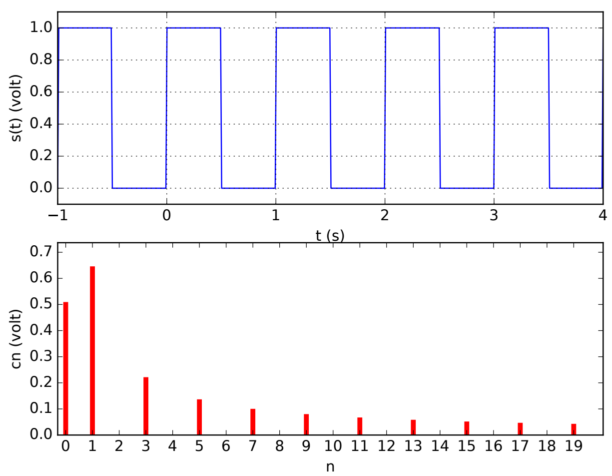
(On peut parfois, en plus, tracer les phases φ_n en fonction de n.)

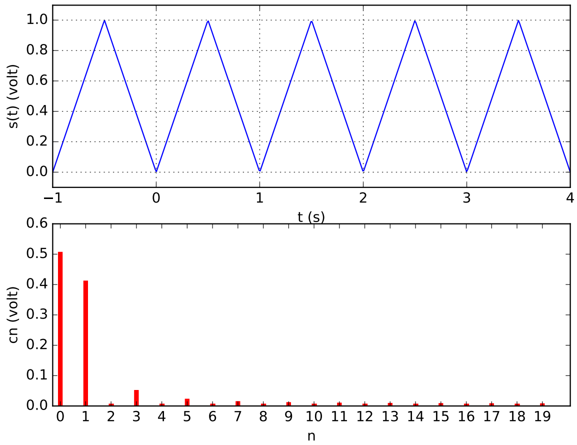
Exemples :











Remarque : il existe des formules dans des cas simples. Par exemple pour le signal créneau ci-dessus, on a $c_n = \dfrac{2}{\pi n}$ si n impair et $c_n = 0$ si $n > 0$ pair. Pour le signal triangle, on a $c_n = \dfrac{4}{\pi^2 n^2}$ si n impair et $c_n = 0$ si $n > 0$ pair.

b/ Cas d'un signal quelconque

Dans le cas d'un signal non périodique, une décomposition similaire existe. Cette fois le signal se décompose comme une somme continue de signaux harmoniques de toutes les fréquences (et non plus de multiples entiers de $f = 1/T$ seulement). On peut donc toujours tracer son spectre.

c/ Spectre et énergie

On peut démontrer l'égalité suivante :

$$\langle s(t)^2 \rangle = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2}.$$

Donc S_{eff}^2 est égale à la somme des valeurs efficaces (au carré) des composantes du spectre.

Or la valeur efficace est souvent proportionnelle à l'énergie contenue dans le signal.

Ceci montre que l'énergie du signal se répartit dans les différentes composantes du spectre, proportionnellement au carré de l'amplitude de chacune.