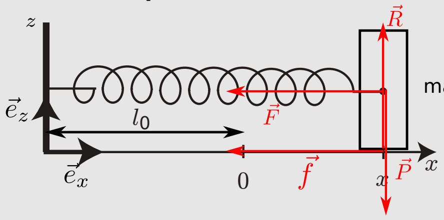
Étude des systèmes linéaires
Chapitre 3

Régime transitoire des systèmes du 2^{nd} ordre

Oscillateurs amortis

I Exemple d'oscillateur amorti : le système masse-ressort avec frottements visqueux

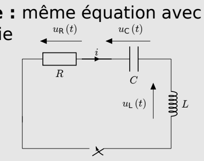
1 - Mise en équation



masse m → équation du type

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$$

et en remarque : même équation avec le circuit RLC série



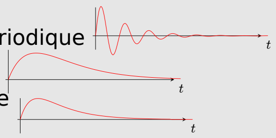
2 - Résolution

discriminant + racines...

$Q > 1/2$ pseudo-périodique

$Q = 1/2$ critique

$Q < 1/2$ apériodique



3 - Un exemple avec d'autres CI

4 - Allure des solutions quand il y a un second membre

II Exemple du circuit RLC série → TD

Ce qu'il faut connaître

(cours : I et II)

▶1 Quelle est l'équation qui caractérise un oscillateur harmonique amorti ? (écrite sous forme canonique : en faisant intervenir la pulsation propre et le facteur de qualité)

▶2 Donner les trois types de régimes transitoires observables pour un oscillateur harmonique amorti en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Tracer pour chacun des régimes précédents l'allure de la réponse en fonction du temps (on prendra par exemple $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$).

▶3 Dans quel cas le régime transitoire est-il le plus bref ? Donner alors l'ordre de grandeur de sa durée en fonction de la pulsation propre.

▶4 Quelle est le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations dans le régime transitoire pseudo-périodique ? Quelle est la durée approximative d'une oscillation si Q est assez grand ?

Ce qu'il faut savoir faire

▶5 **Étude d'un système du second ordre en régime transitoire amorti :** → **EC1**, **EC2**, **EC3**, TD I, II, III

- obtenir l'équation du mouvement, l'écrire sous forme canonique pour identifier le facteur de qualité et la pulsation propre,
- la résoudre complètement pour une valeur du facteur de qualité Q donnée (les conditions initiales étant données, par exemple $x(t = 0) = 0$ et $v(t = 0) = v_0$),
- tracer l'allure de la solution.

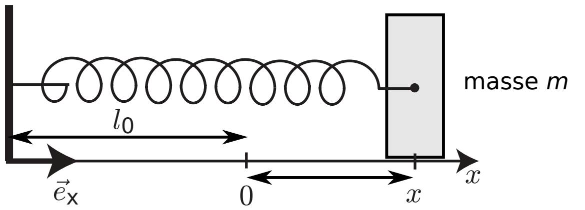
▶6 Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

Exercices de cours

Remarque : les exercices de cours ci-dessous concernent le système masse-ressort horizontal. Il faut également savoir traiter la même chose pour la décharge ou la charge du circuit RLC

→ **Les exercices I et II du TD sont aussi considérés comme des exercices de cours.**

Exercice C1 – Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort avec frottements



On considère le système ci-contre. On se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements sont modélisés par une force s'exerçant sur la masse dont l'expression est $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$ étant une constante. Le ressort est de raideur k et de longueur à vide l_0.

1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$.

2 - Mettre cette équation sous forme canonique, donner alors l'expression du facteur de qualité et de la pulsation propre en fonction de λ, m et k.

Exercice C2 – Résoudre l'équation de l'oscillateur amorti, les CI étant données

On reprend le cas précédent et ses résultats, en particulier l'équation différentielle sur $x(t)$: $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. On se place dans un cas où $Q > 1/2$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

1 - Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera les constantes d'intégration. On tracera l'allure de la solution.

Remarque : les cas où $Q < 1/2$ et où $Q = 1/2$ ont aussi été traités dans le cours (partie I.2, cas 2 et cas 3 à la suite du cas 1 $Q > 1/2$). Ils donnent lieu à des variantes de cet exercice, qu'il faut bien sûr aussi savoir faire. Si votre cours n'est pas clair, il y a une correction de cet EC sur le site de la classe.

Méthodes

Comment obtenir les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti ?
Voir aussi la fiche méthode de mathématiques.

Équation du type $\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$ avec α une constante.

⋆ Solution homogène : pour l'obtenir on écrit le polynôme caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. On cherche son discriminant et ses racines.

- Si $Q < 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ (r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique)
- Si $Q = 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = (At + B)\ \mathrm{e}^{-\mu t}$ ($-\mu$ est racine double du polynôme caractéristique)
- Si $Q > 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\ \mathrm{e}^{-\mu t}$
  (on écrit les racines du polynôme caractéristique comme $r_\pm = -\mu \pm \mathrm{i}\Omega$)

⋆ Solution particulière : on la suppose constante, il reste donc $0 + 0 + \omega_0^2 x = \alpha$, d'où $x_{\text{part}} = \frac{\alpha}{\omega_0^2}$.

⋆ Solution générale : $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}$.

⋆ On détermine A et B avec les deux conditions initiales.

Trame du cours

I – Exemple d'oscillateur amorti : le système masse-ressort avec frottements

Remarque : Animations pour le système masse-ressort
⋆ Lien vers une vidéo montrant les différents régimes d'amortissement pour l'oscillation d'une masse+ressort : cf site classe.
⋆ Animation permettant de régler le facteur de qualité, les CI, et de visualiser l'allure : cf site classe.

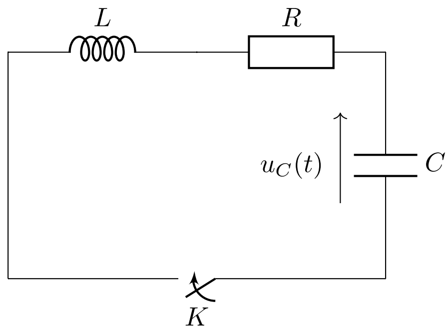
1 – Mise en équation

Sur feuille. Pour réviser : correspond à l'**EC1**.

→ On arrive à l'équation $\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$.

Remarque : Exemple similaire, le circuit RLC et l'évolution de $q(t)$:

On étudie le circuit ci-contre, où le condensateur est initialement chargé (charge $q(t=0) = Q_0$). Pour $t < 0$ le circuit est ouvert. Il est refermé à $t = 0$: le condensateur va se décharger.



1 - Exprimer u_c, u_L et u_R en fonction de la charge $q(t)$ du condensateur.

2 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$.

3 - La mettre sous la même forme que pour le système masse-ressort.

⇝

1 - $u_c = \frac{q}{C}$, $u_R = Ri = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$.

2 - Loi des mailles : $u_C + u_R + u_L = 0$ d'où $\frac{q}{C} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

3 - En divisant par L : $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$.

On identifie avec la forme canonique : $\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$,

donc $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ c'est-à-dire $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.}$

Et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \omega_0\frac{L}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{\sqrt{L}\sqrt{L}}{R} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$.

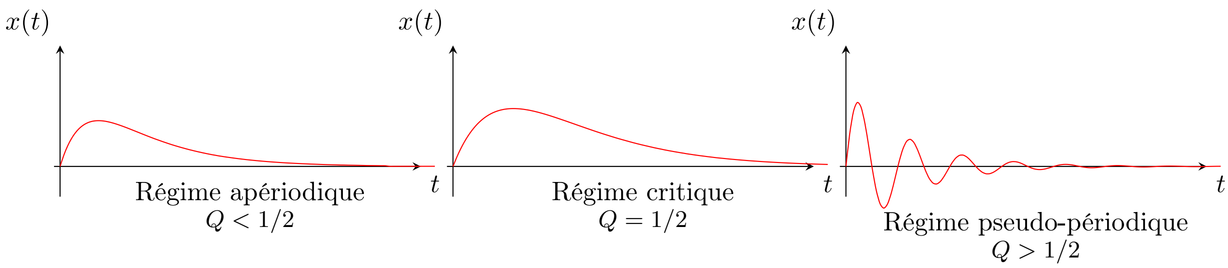
D'où $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$

2 – Résolution de l'équation

Sur feuille. Pour réviser : correspond à l'**EC2**.

Ici l'équation est $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$,
et les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

Allure des solutions :



3 – Un exemple avec d'autres CI

a/ Résolution

On reprend le système masse-ressort horizontal, dont l'équation est $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$.

On change les CI : cette fois, $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Prenons par exemple le cas où $Q > 1/2$.

⋆ On a encore la forme générale des solutions : $\boxed{x(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\,\mathrm{e}^{-\mu t} + 0}$ avec $\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$

⇝ Utiliser les conditions initiales pour obtenir A et B.

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = x_0$.
D'après la solution, on a $x(0) = A$.
Donc $\boxed{A = x_0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = 0$.
Il faut dériver la solution :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\right)\\ &= -A\Omega\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + A\cos(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t} + B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}\end{aligned}$$

Donc $\dot{x}(0) = -A\mu + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = A\frac{\mu}{\Omega} = x_0\frac{\mu}{\Omega}.}$

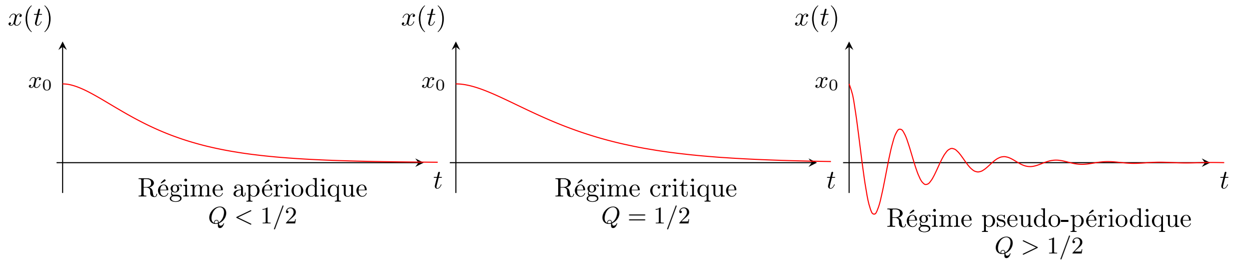
⋆ Finalement on a donc

$$\boxed{x(t) = x_0\left(\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

b/ Tracés

Ici l'équation est $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$,
et les conditions initiales sont $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Allure des solutions :



4 – Allure des solutions lorsqu'il y a un second membre

Traçons l'allure des solutions et des portraits de phase lorsqu'il y a un second membre non nul :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E_0.$$

Ce sera le cas de la charge du circuit RLC (TD II).

Par exemple, conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. On a (et on pourra tracer les portraits de phase associés !) :