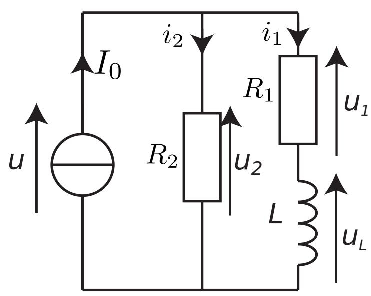
Étude des systèmes linéaires
Chapitre 1

Correction – DM – Charge d'une bobine en dérivation



1 - ⋆ Pour $t < 0$ on a $i_1 = i_2 = 0$ car aucune source n'alimente le circuit.

Donc $\boxed{i_1(0^-) = 0}$ et $\boxed{i_2(0^-) = 0.}$

⋆ <u>L'intensité traversant une bobine étant continue</u>, on a $\boxed{i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0.}$

⋆ Pour i_2 : avec la loi des nœuds appliquée à $t = 0^+$ on en déduit $\boxed{i_2(0^+) = I_0 - i_1(0^+) = I_0.}$

On remarque que $i_2(t)$ n'est pas continue en $t = 0$ (il passe de 0 à I_0). Rien d'étonnant, il ne s'agit pas du courant traversant une bobine, il peut donc être continu ou non.

2 - ⋆ Loi des nœuds : $I_0 = i_1 + i_2$.

⋆ Loi des mailles : $u_2 = u_1 + u_L$

$$\Rightarrow\ R_2 i_2 = R_1 i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow\ R_2(I_0 - i_1) = Ri_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow\ R_2 I_0 = (R_2 + R_1)i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2}{L}i_1 = \frac{R_2 I_0}{L}$$
$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau} = \frac{R_2 I_0}{L} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}.}$$

L'unité de τ est la seconde.

3 - Il faut résoudre l'équation précédente.

⋆ Solution de l'équation homogène : $i_H(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

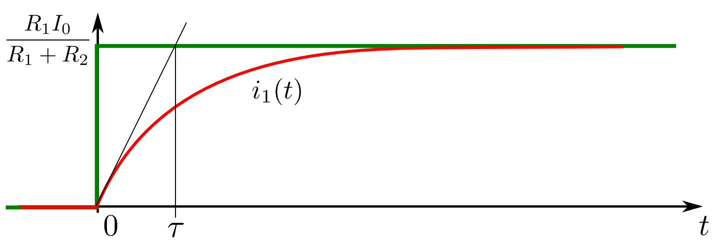
⋆ Solution particulière : elle est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i_P}{\mathrm{d}t} = 0$ et il reste $\dfrac{i_P}{\tau} = \dfrac{R_2 I_0}{L}$, d'où $i_P = \tau\,\dfrac{R_2 I_0}{L} = \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$.

⋆ D'où la solution générale : $i_1(t) = i_H(t) + i_P = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$.

⋆ Constante d'intégration : on sait que $i_1(0^+) = 0$, or $i_1(0^+) = A + \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$, donc $A = -\dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$.

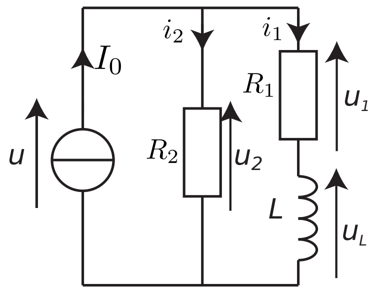
⋆ Finalement : $i_1(t) = -\dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$, soit encore : $\boxed{i_1(t) = \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$

4 - Allure de $i_1(t)$:



Étude des systèmes linéaires
Chapitre 1

Correction – DM – Charge d'une bobine en dérivation



1 - ⋆ Pour $t < 0$ on a $i_1 = i_2 = 0$ car aucune source n'alimente le circuit.

Donc $\boxed{i_1(0^-) = 0}$ et $\boxed{i_2(0^-) = 0.}$

⋆ <u>L'intensité traversant une bobine étant continue,</u> on a $\boxed{i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0.}$

⋆ Pour i_2 : avec la loi des nœuds appliquée à $t = 0^+$ on en déduit $\boxed{i_2(0^+) = I_0 - i_1(0^+) = I_0.}$

On remarque que $i_2(t)$ n'est pas continue en $t = 0$ (il passe de 0 à I_0). Rien d'étonnant, il ne s'agit pas du courant traversant une bobine, il peut donc être continu ou non.

2 - ⋆ Loi des nœuds : $I_0 = i_1 + i_2$.

⋆ Loi des mailles : $u_2 = u_1 + u_L$

$$\Rightarrow\ R_2 i_2 = R_1 i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow\ R_2(I_0 - i_1) = R i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow\ R_2 I_0 = (R_2 + R_1) i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2}{L} i_1 = \frac{R_2 I_0}{L}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau} = \frac{R_2 I_0}{L} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}.}$$

L'unité de τ est la seconde.

3 - Il faut résoudre l'équation précédente.

⋆ Solution de l'équation homogène : $i_H(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

⋆ Solution particulière : elle est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i_P}{\mathrm{d}t} = 0$ et il reste $\dfrac{i_P}{\tau} = \dfrac{R_2 I_0}{L}$, d'où $i_P = \tau\,\dfrac{R_2 I_0}{L} = \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$.

⋆ D'où la solution générale : $i_1(t) = i_H(t) + i_P = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$.

⋆ Constante d'intégration : on sait que $i_1(0^+) = 0$, or $i_1(0^+) = A + \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$, donc $A = -\dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$.

⋆ Finalement : $i_1(t) = -\dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$, soit encore : $\boxed{i_1(t) = \dfrac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$

4 - Allure de $i_1(t)$: