TP

Mesures et incertitude

I Mesure

Pourquoi des incertitudes ?

Mesurer une grandeur n'est pas simplement rechercher la valeur de cette grandeur, mais aussi lui associer une incertitude afin de pouvoir qualifier la *qualité* de la mesure.

Exemples :

- Vérification d'une loi : il faut comparer les mesures aux prédictions théoriques.

  Cette comparaison se fait à l'aide des incertitudes sur les valeurs expérimentales.
- Fiablilité : pesage dans les commerces, détermination d'une concentration lors d'une analyse biologique, mesure de vitesse par radar, etc. : ces mesures n'ont pas beaucoup d'intérêt si on n'a pas une idée de l'incertitude associée.

Plusieurs éléments peuvent affecter la qualité d'une mesure :

- **Variabilité :** répéter une mesure donne rarement le même résultat (à cause des gestes de la personne, de facteurs d'influence aléatoires comme la température, de la précision de l'instrument, etc).
- **Erreur de modélisation :** la mesure d'une grandeur suit un protocole de mesure qui se base sur un modèle de l'expérience. Si ce modèle n'est pas correct, il y aura une erreur dans le résultat de la mesure (par exemple je mesure la période et la longueur d'un pendule, mais j'utilise ensuite une mauvaise formule pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g car il fallait prendre en compte les frottements ; ou bien en chimie la solution titrante n'a en fait pas la concentration annoncée ; ou un appareil est mal calibré, etc).

$\Rightarrow$ **Incertitude :** un résultat de mesure est toujours accompagné d'une incertitude, qui permet de délimiter l'intervalle dans lequel la valeur recherchée a de bonnes chances de se trouver.

$\Rightarrow$ S'il n'y a pas d'erreur de modélisation, alors la valeur réelle de la grandeur mesurée est, avec une bonne probabilité, dans l'intervalle d'incertitude.

II Incertitude-type

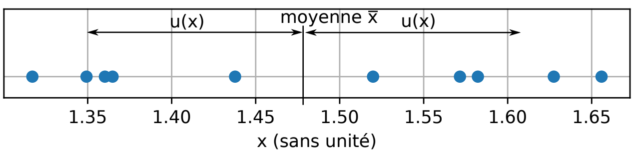
Soit x une grandeur à mesurer. On note $u(x)$ l'incertitude-type associée à cette mesure.

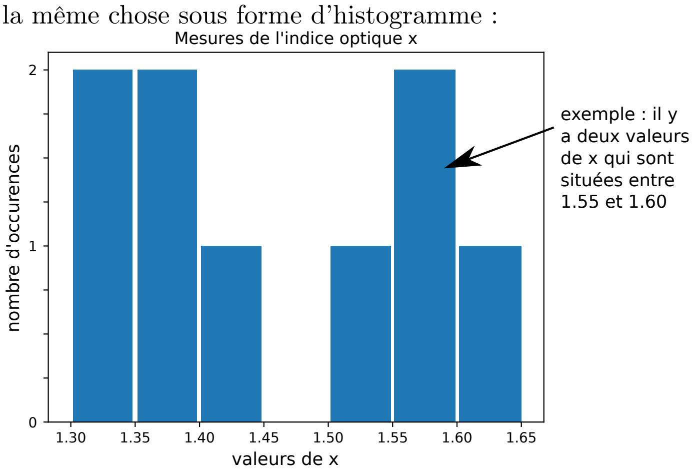
II.1 Cas où on répète la mesure (évaluation de type A)

On répète N fois la mesure, pour obtenir les valeurs x_1, x_2, ..., x_N.
Par exemple on regroupe les mesures de l'indice optique du plexiglas réalisées par 10 groupes d'étudiants :

Mesure de l'indice optique	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Valeur	1,63	1,44	1,32	1,57	1,36	1,52	1,58	1,66	1,35	1,36

Ci-dessous à gauche la répartition de ces mesures, et à droite la même chose sous forme d'histogramme :





II.1.1 Incertitude-type $u(x)$ de la série de mesures, associée à une mesure

Une fois qu'on a les mesures, on peut calculer :

- La moyenne de la série : $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$

- L'incertitude-type de la série = l'écart-type de la série : $\boxed{u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}.}$

On peut utiliser ces formules, mais le plus simple reste de rentrer les données dans la calculatrice (liste) ou sur l'ordinateur et d'utiliser les outils statistiques [1].

(**Remarque :** pour $u(x)$ on peut aussi utiliser $1/N$ à la place de $1/(N-1)$ sous la racine, même si dans le contexte des incertitudes on prêfère $1/(N-1)$.)

⇒ Dans l'exemple ci-dessus, on calcule que $\bar{x} = 1{,}48$ et $u(x) = 0{,}13$. (et on les a reportés sur la figure page précédente)

Interprétation

L'incertitude-type quantifie la **dispersion** des mesures, la **variabilité** de la mesure.
Par exemple :

- Si je fais **une** mesure, elle est à quelques $u(x)$ de la moyenne $\bar{x}$.

⇒ $u(x)$ est l'incertitude-type associée à **une** mesure.

II.1.2 Incertitude-type $u(\bar{x})$ associée à la moyenne

$\bar{x}$ est la moyenne des N mesures x_1, x_2, ..., x_N.

- Par rapport à une seule mesure, cette moyenne $\bar{x}$ donne une <u>meilleure</u> estimation de la grandeur mesurée.
- L'incertitude-type $u(\bar{x})$ associée à cette moyenne est donc <u>plus petite</u> que celle associée à une seule mesure (notée $u(x)$ ci-dessus).

  Il y a une formule pour la calculer : $\boxed{u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}}$ avec N le nombre de mesures.

⇒ $u(\bar{x})$ est l'incertitude-type associée à **la moyenne** des mesures.

> **Avec l'exemple ci-dessus :** $u(\bar{x}) = u(x)/\sqrt{10} = 0{,}040$.
>
> (Interprétation : si plusieurs classes de PTSI font chacune 10 mesures d'indice optique et calculent chacune leur moyenne, on obtient plusieurs moyennes $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., a priori différentes, dont l'écart-type vaut environ 0,040. Ceci donne donc la précision atteinte par un calcul de moyenne.)

II.1.3 Bilan

Bilan sur les incertitudes statistiques (type A)

- Une mesure x_1 : la valeur réelle de la grandeur est avec une bonne probabilité dans l'intervalle $x_1 \pm \text{qq}\ u(x)$.

  (qq signifie "quelques fois")

  $u(x)$ est calculé comme l'écart-type de la série de mesure.

- N mesures dont on fait la moyenne : la valeur réelle de la grandeur est avec une bonne probabilité dans l'intervalle $\bar{x} \pm \text{qq}\ u(\bar{x})$.

  On a $\boxed{u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}.}$

  ⇒ On est donc $\sqrt{N}$ fois plus précis si on fait N mesures.

1. Sur calculatrice TI : symbole `Sx`, sur Casio : symbole $x\sigma n - 1$, sur Numworks : "Ecart-type échantillon". Sous Python, `np.std(liste,ddof=1)`.

Avec l'exemple ci-dessus :

- Si je n'exploite que la première mesure : j'annonce que $x_1 = 1{,}63$ et $u(x) = 0{,}13$, et la valeur recherchée est avec une bonne probabilité dans l'intervalle $1{,}63 \pm 0{,}13$ (c'est-à-dire $[1{,}50; 1{,}76]$).
- Si j'exploite toute la série, j'annonce que $\bar{x} = 1{,}48$ et $u(\bar{x}) = 0{,}040$, et la valeur recherchée est avec une bonne probabilité dans l'intervalle $1{,}48 \pm 0{,}04$ (c'est-à-dire $[1{,}44; 1{,}52]$). C'est plus précis.

Remarque : l'évaluation de type A n'est valable que s'il y a une certaine variabilité d'une mesure à l'autre. De plus, tout ceci vaut s'il n'y a pas d'erreur de modélisation ou de raisonnement, sans quoi la valeur réelle de la grandeur recherchée sera mal estimée...

II.2 Cas où on ne répète pas la mesure (évaluation de type B)

II.2.1 Formule générale

Il est souvent pénible ou impossible de répéter la mesure plusieurs fois. (Ou bien répéter la mesure ne donne aucune variabilité.)
Dans ce cas, il faut estimer l'incertitude-type autrement.

Incertitude de type B (sans répéter la mesure)

- On *estime* la plus petite plage dans laquelle on est certain de trouver la valeur recherchée.
- On note x la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur.
  Autrement dit, on est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[x - \Delta, x + \Delta]$.
- L'incertitude-type de la mesure est $\boxed{u(x) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}.}$

II.2.2 Justification de la formule $u(x) = \Delta/\sqrt{3}$ (plus tard dans l'année)

Pour justifier cette formule, nous allons procéder à une simulation informatique.

Prenons un exemple : on mesure à la règle graduée au millimètre la longueur $d = 16\,\mathrm{mm}$.

- Vu les graduations, on est certain que la longueur est située entre $d_{\mathrm{min}} = 15{,}5\,\mathrm{mm}$ et $d_{\mathrm{max}} = 16{,}5\,\mathrm{mm}$.
- Le centre de cet intervalle est $d = 16\,\mathrm{mm}$, sa demi-largeur est $\Delta = 0{,}5\,\mathrm{mm}$.
- D'après la formule précédente, $u(d) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}} = \dfrac{0{,}5\,\mathrm{mm}}{1{,}73} = 0{,}289\,\mathrm{mm}$.

  Mais voyons comment retrouver ceci sans la formule.

On suppose que la probabilité que la longueur soit dans l'intervalle $[d_{\mathrm{min}}, d_{\mathrm{max}}]$ est uniforme : il n'y a pas d'endroit privilégié entre d_{min} et d_{max}. On dit que d suit une **loi uniforme**.

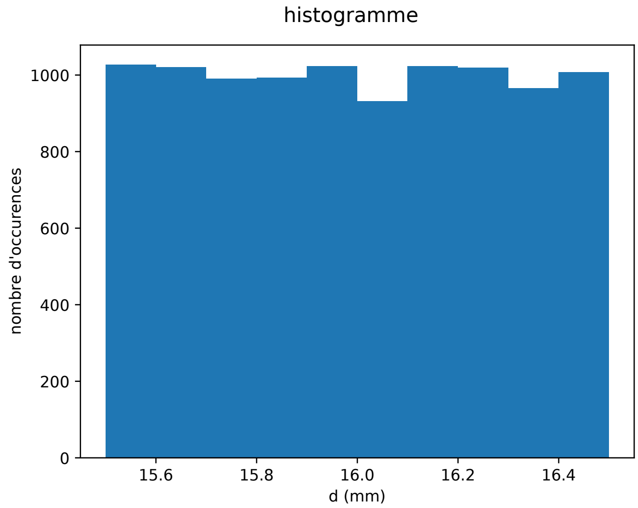
On simule ceci en langage Python en effectuant un tirage au sort, de la façon suivante :

```python
import numpy as np              # utilisation de la bibliothèque numpy, qu'on appelle np

dmin = 15.5
dmax = 16.5
N = 1000       # nombre de tirages au sort
liste = []   # création d'une liste vide

for i in range(N):                      # on répète N fois
    d = np.random.uniform(dmin,dmax)    # tirage au sort d'une valeur entre dmin et dmax
    liste.append(d)                     # ajout de cette valeur à la liste
```

À l'issue de ce programme, `liste` contient `N=1000` valeurs de d tirées aléatoirement entre d_{min} et d_{max} selon une loi uniforme. Un histogramme confirme ceci (commande `plt.hist(liste_d)`) :

exemple des premières valeurs :

```
>>> liste
[15.85, 16.45, 15.85, 15.86, 15.95, 15.68, 15.93, 16.26, 16.24, 15.92, 16.36, 15
.51, 16.29, 15.53, 16.25, 16.18, 15.66, 16.23, 16.33, 16.27, 15.81, 16.46, 16.16
, 15.73, 15.61, 15.91, 15.85, 16.31, 16.03, 15.6, 15.83, 16.45, 16.02, 15.9, 16.
24, 15.78, 16.29, 15.55, 16.04, 15.92, 15.91, 15.58, 16.34, 16.06, 15.62, 16.05,
 16.27, 15.56, 15.66, 16.02, 15.55, 16.02, 16.15, 16.48, 16.03, 16.0, 16.46, 15.
71, 15.5, 15.56, 15.66, 15.98, 16.13, 15.63, 16.12, 16.11, 15.64, 15.92, 16.07,
16.08, 15.92, 15.63, 16.34, 15.89, 16.24, 15.67, 15.59, 15.54, 16.08, 15.79, 15.
62, 16.4, 16.32, 16.47, 15.71, 15.72, 15.82, 16.43, 16.21, 16.38, 16.27, 15.7, 1
5.88, 16.06, 15.57, 16.15, 16.25, 15.87, 15.75, 15.62, 16.16, 15.98, 15.8, 15.77
, 16.26, 15.6, 16.24, 16.3, 16.49, 16.08, 16.37, 15.76, 16.12, 15.57, 16.4, 16.3
, 16.24, 15.51, 16.38, 15.95, 15.97, 15.98, 16.25, 15.63, 16.28, 16.1, 16.0, 15.
91, 15.74, 16.12, 16.19, 16.41, 16.06, 16.46, 16.39, 16.27, 15.85, 16.32, 16.33,
 15.51, 15.54, 16.25, 15.51, 16.27, 15.51, 15.9, 15.53, 15.78, 15.96, 15.96, 15.
64, 16.37, 15.64, 16.15, 16.36, 16.4, 16.38, 16.27, 16.11, 15.85, 16.44, 15.63,
16.26, 16.44, 15.92, 16.14, 15.66, 15.9, 16.46, 15.55, 15.59, 15.86, 16.47, 15.5
```



On peut ensuite demander au programme de calculer la moyenne et l'écart-type de la liste des tirages. On obtient :

- moyenne $\bar{d} = 16{,}00\,\text{mm}$.
- écart-type (et donc incertitude type) $u(d) = 0{,}289\,\text{mm}$.

On retrouve bien la même valeur pour $u(d)$ que celle calculée avec la formule $\Delta/\sqrt{3}$.
$\Rightarrow$ Ceci justifie donc l'usage de cette formule, dont on se servira directement à l'avenir.

Remarque : Un tel algorithme, qui utilise des tirages aléatoires, est appelé un algorithme Monte-Carlo.

II.2.3 Exemples d'estimations d'incertitude de type B

Voir l'annexe à la fin du poly.

III Incertitude-type relative

Prenons le résultat d'une mesure de longueur $x = 16\,\text{mm}$, avec l'incertitude-type $u(d) = 0{,}29\,\text{mm}$.

L'incertitude relative est définie comme
$$\frac{u(x)}{x} = \frac{0{,}29}{16} = 0{,}018.$$

On l'exprime souvent en pourcentage, soit ici $\dfrac{u(x)}{x} = 1{,}8\%$.

$\rightarrow$ Ceci signifie que l'on connaît x à 1,8% près.

Définition

De manière générale, l'incertitude-type relative est $\dfrac{u(x)}{x}$. Elle n'a pas d'unité.

$\rightsquigarrow_1$ **Exemple :** une mesure de pression dans une conduite au manomètre différentiel indique une pression $p = 10{,}5\,\text{bar}$. Le fabricant indique que son appareil est précis à 5%.
Quelle est la précision Δ de la mesure ? En déduire l'incertitude-type $u(p)$ sur la pression.

IV Composition des incertitudes

> **Exemple :**
> On souhaite mesurer la vitesse du son dans l'air, en mesurant le temps t mis par un "clap" sonore pour parcourir une certaine distance d.
> Suite aux mesures, on obtient $d = 10{,}0\,\text{m}$ et $u(d) = 0{,}2\,\text{m}$; et $t = 0{,}0290\,\text{s}$ et $u(t) = 0{,}0005\,\text{s}$.
> On sait que la vitesse du son vaut alors $c = \dfrac{d}{t} = 344{,}83\,\text{m/s}$. Mais quelle est l'incertitude-type sur cette vitesse ?

IV.1 Cas d'une somme ou d'un produit

Formules pour la propagation des incertitudes

- Dans le cas où $y = ax$ avec a un réel, alors
$$u(y) = |a|u(x). \tag{1}$$
- Dans le cas où $y = x_1 + x_2$, ou bien $y = x_1 - x_2$:
$$u(y) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}. \tag{2}$$
- Dans le cas où $y = a\,x_1 \times x_2$ ou bien $y = a\,\dfrac{x_1}{x_2}$ (a est un réel) :
$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}. \tag{3}$$

  Et s'il y a un facteur x_3, par ex. $y = x_1x_2x_3$ ou x_1x_2/x_3, alors on ajoute encore un terme $\left(\dfrac{u(x_3)}{x_3}\right)^2$ sous la racine, etc.

  Cas particulier : si $y = 1/x$, alors il n'y a qu'un seul terme et $\dfrac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\dfrac{u(x)}{x}\right)^2} = \dfrac{u(x)}{x}$.

Suite de l'exemple :
$\rightsquigarrow_2$ D'après les formules, on a $u(c) =$

Remarque : souvent, une incertitude domine assez largement les autres. On peut alors simplifier les formules en prenant seulement celle-ci en compte.

IV.2 Cas général (plus tard dans l'année)

Pour les cas qui ne sont pas dans l'encadré ci-dessus, nous allons utiliser une simulation informatique.

Incertitude-type d'une loi uniforme

Rappel : pour une loi uniforme de demi-largeur Δ, l'incertitude-type est $u = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}$.
(démontré partie II.2.2 avec la simulation Monte-Carlo)

Exemple :
On reprend l'exemple de la mesure de la vitese du son, pour le traiter sans utiliser la formule mais avec une simulation. Ceci va aussi permettre de justifier la formule.

Rappel : $d = 10{,}0\,\mathrm{m}$ et $u(d) = 0{,}2\,\mathrm{m}$; et $t = 0{,}0290\,\mathrm{s}$ et $u(t) = 0{,}0005\,\mathrm{s}$.

- Le fait que $d = 10{,}0\,\mathrm{m}$ et $u(d) = 0{,}2\,\mathrm{m}$ signifie que répéter des mesures de d donne des résultats répartis autour de la moyenne $\bar{d} = 10{,}0\,\mathrm{m}$, avec un écart-type $u(d) = 0{,}2\,\mathrm{m}$.

  On suppose la distribution uniforme.
$$\text{Écart-type } u(d) = 0{,}2\,\mathrm{m} \;\Rightarrow\; \text{demi-largeur } \Delta = \sqrt{3}\,u(d) = 0{,}35\,\mathrm{m}.$$
  $\Rightarrow$ On simule un tirage au sort d'une loi uniforme entre $10 - 0{,}35$ et $10 + 0{,}35$, exactement comme dans la partie II.2.2.
- Idem pour t :
$$\text{Écart-type } u(t) = 0{,}0005\,\mathrm{s} \;\Rightarrow\; \text{demi-largeur } \Delta = \sqrt{3}\,u(t) = 0{,}00087\,\mathrm{s}.$$

⇒ On simule un tirage au sort d'une loi uniforme entre $0{,}290 - 0{,}00087$ et $0{,}290 + 0{,}00087$, exactement comme dans la partie II.2.2.

– Pour chaque tirage de d et de t, on calcule $c = d/t$.

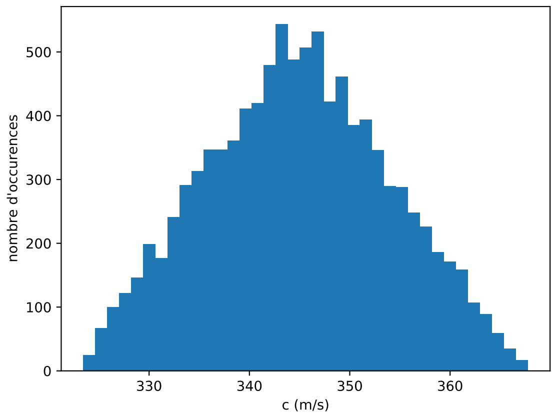
On obtient ainsi un grand nombre de valeurs de c, avec lesquelles on peut calculer l'écart-type et donc connaître l'incertitude-type !

Le programme :

```
import numpy as np               # utilisation de la bibliothèque numpy, qu'on appelle np

N = 10000        # nombre de tirages au sort
liste = []       # création d'une liste vide

for i in range(N):                                       # on répète N fois
    d = np.random.uniform(10-0.35,10+0.35)               # tirage au sort d'une valeur de d
    t = np.random.uniform(0.029-0.00087,0.029+0.00087)   # tirage au sort d'une valeur de t
    c = d/t
    liste.append(c)                                      # ajout de la valeur c à la liste liste_c

inc_type = np.std(liste,ddof=1)                          # calcul de l'écart-type
print(inc_type)                                          # et affichage
```

⇒ Le programme affiche alors l'incertitude-type : $u(c) = 9{,}1\,\mathrm{m/s}$.

Remarque : On peut demander d'afficher l'histogramme des valeurs de c, avec `plt.hist(liste, bins='auto')`. On voit que ce n'est pas une distribution uniforme →



Remarque : $c = d/t$ est une formule de type quotient, et donc la formule (3) s'applique :

$$u(c) = 344 \times \sqrt{\left(\frac{0.2}{10.0}\right)^2 + \left(\frac{0.0005}{0.0290}\right)^2} = 9{,}1\,\mathrm{m/s}.$$

C'est bien la même chose qu'avec la simulation numérique !

Dans le cas ci-dessus, il est plus simple et plus rapide d'utiliser la formule (3). Mais il y a des cas où aucune formule simple ne s'applique, par exemple si on obtient l'indice optique n avec la formule $n = \sin i / \sin r$ où i et r sont deux angles mesurés. On doit alors forcément utiliser la simulation, dont le principe général est résumé ci-dessous.

Idée de l'algorithme Monte Carlo pour la composition des incertitudes

On définit un nombre de tirages au sort	`N = 10000`
On initialise une liste vide.	`liste = []`

On réalise les tirages au sort de chaque grandeur mesurée, et à chaque fois on calcule la grandeur associée et on la met dans la liste.
(ci-contre on a repris l'exemple de la vitesse du son)
	`for i in range(N):`
	`   d = np.random.uniform(..,..)`
	`   t = np.random.uniform(..,..)`
	`   c = d/t`
	`   liste.append(c)`

On calcule l'écart-type des valeurs de la liste, qui donne donc l'incertitude-type.	`inc_type = np.std(liste,ddof=1)` `print(inc_type)`
(Si on le souhaite, on peut tracer l'histogramme.)	`plt.hist(liste, bins='auto')`

V Règle d'écriture du résultat de mesure (chiffres significatifs)

- On écrit l'incertitude-type $u(x)$ avec **deux** chiffres significatifs.

  Exemple : $u(x) = 1{,}234$ est arrondi à $u(x) = 1{,}2$.

- On écrit l'incertitude-type $u(x)$ avec la même puissance de 10 et la même unité que pour la valeur de x.

  Ceci permet de mieux visualiser son importance.

  Exemple : $x = 1{,}222\,\mathrm{km}$ et $u(x) = 14\,\mathrm{m}$ sera plutôt écrit $x = 1{,}222\,\mathrm{km}$ et $u(x) = 0{,}014\,\mathrm{km}$.

  Exemple : $x = 4{,}2 \times 10^2\,\mathrm{s}$ et $u(x) = 30\,\mathrm{s}$ sera plutôt écrit $x = 4{,}2 \times 10^2\,\mathrm{s}$ et $u(x) = 0{,}30 \times 10^2\,\mathrm{s}$.

- Une fois les règles ci-dessus appliquées, on écrit la valeur de x avec le même nombre de chiffres après la virgule que $u(x)$.

  Exemple : $x = 4{,}2 \times 10^2\,\mathrm{s}$ et $u(x) = 0{,}30 \times 10^2\,\mathrm{s}$ sera plutôt écrit $x = 4{,}20 \times 10^2\,\mathrm{s}$ et $u(x) = 0{,}30 \times 10^2\,\mathrm{s}$.

  Exemple : $x = 2{,}1234\,\mathrm{s}$ et $u(x) = 0{,}10\,\mathrm{s}$ sera plutôt écrit $x = 2{,}12\,\mathrm{s}$ et $u(x) = 0{,}10\,\mathrm{s}$.

VI Comparaison de mesures, comparaison à une valeur de référence

On souhaite comparer la valeur mesurée expérimentalement (notons la x_{exp}) et la valeur prédite par la théorie et le modèle (que l'on peut noter $x_{\text{réf}}$ ou $x_{\text{théo}}$). Seule la prise en compte des incertitudes permet ceci.

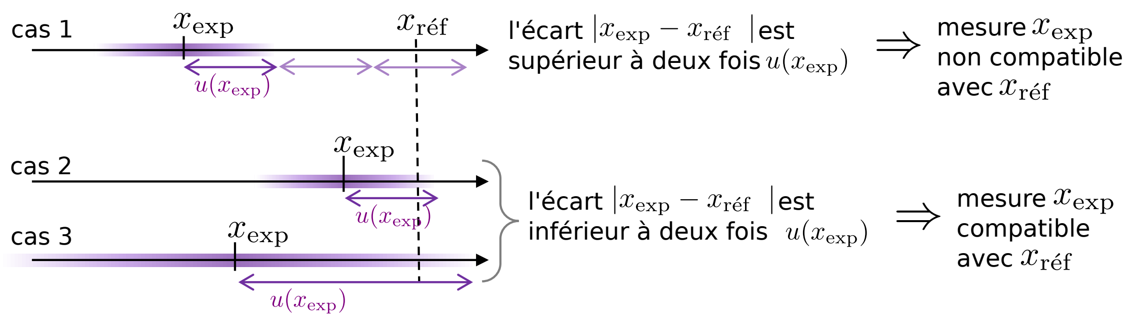
VI.1 Cas où la valeur de référence n'a pas d'incertitude

Par définition, l'incertitude-type quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsqu'une mesure et une valeur de référence sont compatibles, on s'attend à ce qu'elles ne coïncident pas exactement, mais qu'elles ne s'écartent pas l'une de l'autre de plus que de "quelques" incertitudes-type.

Traditionnellement, ce "quelque" est un <u>facteur 2</u> :

$$\text{compatibles si } |x_{\text{exp}} - x_{\text{réf}}| \leq 2 \times u(x_{\text{exp}}).$$

Illustrations :



Écart normalisé ou z-score

Pour savoir si une mesure est compatible avec une valeur de référence, on calcule l'écart normalisé (ou z-score) :

$$\boxed{z = \frac{|x_{\text{exp}} - x_{\text{réf}}|}{u(x_{\text{exp}})}}.$$

Si $z \leq 2$, alors l'écart expérience-référence est assez faible et la mesure est **compatible** avec la valeur de référence.

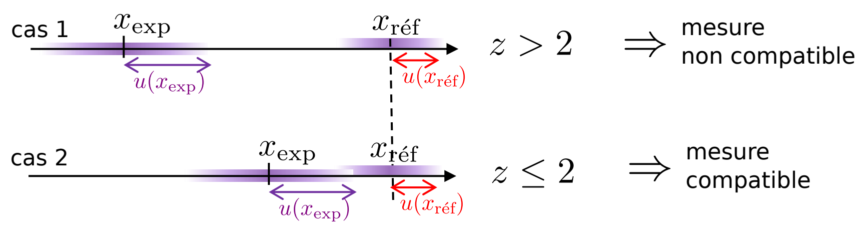
VI.2 Cas où la valeur de référence a aussi une incertitude

La valeur de référence peut aussi posséder une incertitude. Ou bien on peut vouloir comparer les résultats de deux protocoles de mesure différents.

Par exemple la valeur théorique de la vitesse du son dans l'air est $c_{\text{théo}} = \sqrt{1{,}4RT/M}$ avec R la constante des gaz parfaits, M la masse molaire de l'air, et T la température : mais cette dernière doit être mesurée et possède une incertitude, donc $c_{\text{théo}}$ aussi.

Le critère de compatibilité est du même type, mais on prend en compte les deux incertitudes-type.

> **Écart normalisé ou z-score**
>
> Si la valeur de référence a aussi une incertitude, l'écart normalisé devient :
>
> $$z = \frac{|x_{\text{exp}} - x_{\text{réf}}|}{\sqrt{u(x_{\text{exp}})^2 + u(x_{\text{réf}})^2}}.$$
>
> Si $z \leq 2$, alors l'écart expérience-référence est assez faible et la mesure est **compatible** avec la valeur de référence.



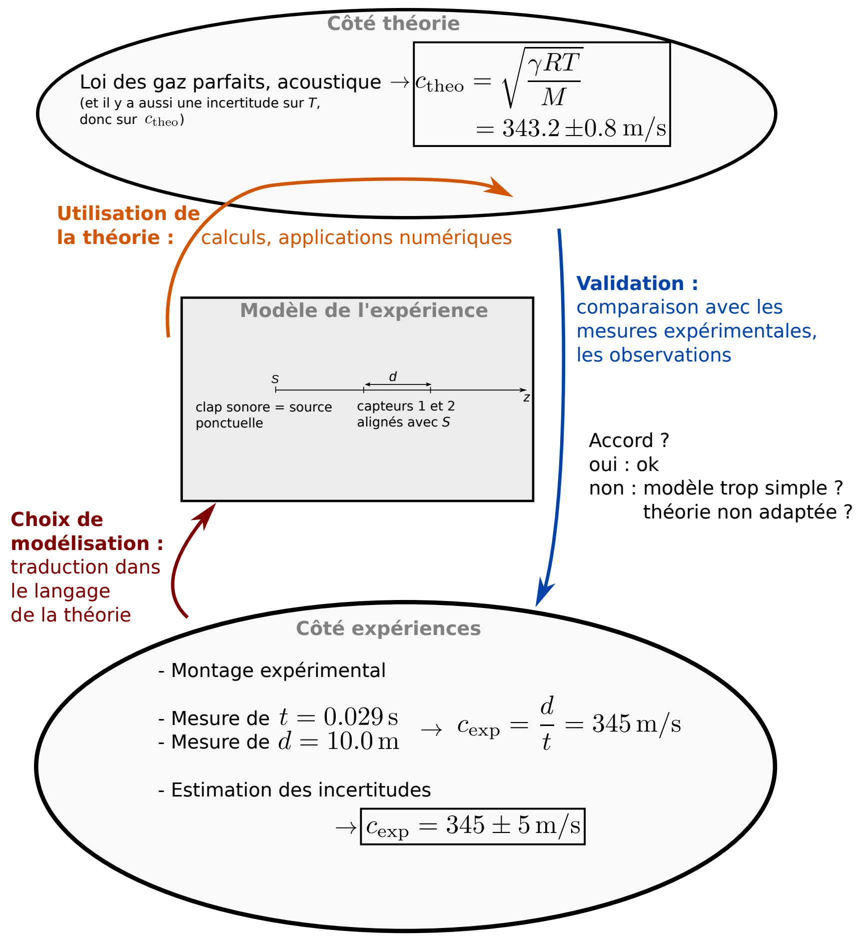
VI.3 Discussion sur la compatibilité ou non

Lorsque les mesures ne sont pas compatibles avec la valeur de référence ou la valeur calculée via la théorie, il faut chercher à comprendre pourquoi.

- **Un problème venant de l'expérimentateur :** on a mal manipulé et commis une erreur de protocole, ou fait une erreur de calcul quelque part.
- **Un problème matériel :** le matériel est défectueux, les composants ou solutions utilisées n'ont pas les valeurs indiquées...
- **Un problème dans l'estimation des incertitudes :** on les a sous-estimées, elles sont en réalité plus importantes !
- **Un problème au niveau de la théorie ou du modèle utilisé :** Si toutes les causes précédentes sont écartées, alors c'est que l'expérience invalide le modèle utilisé.

  Par exemple certaines hypothèses du modèle sont exagérées (il faut prendre en compte les frottements, la résistance interne du GBF, le fait que la masse n'est pas ponctuelle, etc.).

N'oublions pas qu'une mesure est un aller-retour entre observations et théorie :



VII Annexe : exemples d'évaluation d'incertitude de type B (une seule mesure)

La recette est toujours la même : estimer la demi-largeur Δ (aussi appelée parfois la "précision" de la mesure ou de l'appareil), telle qu'on soit presque certain que la valeur mesurée est dans $[x-\Delta, x+\Delta]$. Puis l'incertitude-type est $u(x) = \Delta/\sqrt{3}$.

Remarque : Les règles ci-dessous ne doivent pas toujours être suivies strictement. C'est à vous d'estimer raisonnablement la plage $[x-\Delta, x+\Delta]$ dans laquelle vous êtes quasi-certain de trouver la valeur recherchée. Par exemple en optique Δ peut dépasser la graduation s'il y a une plage sur laquelle on n'est pas sûr que l'image est nette.

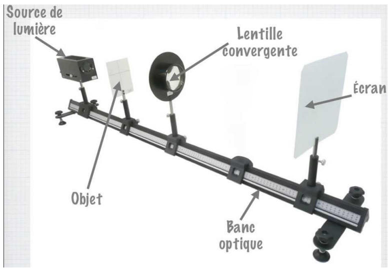
- **Instrument gradué (règle graduée, vernier de goniomètre, verrerie graduée en chimie si on manipule parfaitement, etc) :**

$$\Delta = \text{ demi-graduation (ou graduation).}$$

> **Exemple :** On mesure 3,4 cm avec une règle graduée au mm. On prend $\Delta = 1\,\text{mm}/2 = 0{,}5\,\text{mm}$, et donc $u(L) = \Delta/\sqrt{3} = 0{,}3\,\text{mm}$.

- **Plage :** on estime que la mesure est entre deux valeurs x_{min} et x_{max}. Alors la demi-largeur est logiquement :

$$\Delta = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2}.$$

> **Exemple en optique :** on mesure la distance OA' entre lentille et écran lorsque l'image de l'objet sur l'écran est nette.
> L'axe du banc optique est gradué au mm, et on pourrait donc prendre une précision $\Delta = 0{,}5\,\text{mm}$.
>
> Mais il est difficile d'apprécier, à l'œil, la position exacte de l'écran pour laquelle l'image est nette. Supposons par exemple que l'on observe une image nette pour une position de l'écran comprise en $OA' = 3{,}2\,\text{cm}$ et $OA' = 3{,}6\,\text{cm}$. On prendra alors $\Delta = (3{,}6 - 3{,}2)/2 = 0{,}2\,\text{cm}$, puis $u(OA') = \Delta/\sqrt{3} = 0{,}11\,\text{cm}$.
>
> 
>
>
> **Exemple en électronique :** on veut repérer la fréquence de résonance d'un circuit RLC. Le lieu exact de la résonance est parfois difficile à estimer. C'est alors à vous de dire dans quelle plage $[f_{\text{min}}, f_{\text{max}}]$ de fréquences elle se situe. On a alors $\Delta = (f_{\text{max}} - f_{\text{min}})/2$.

- **Mesure d'un volume avec une verrerie jaugée (pipette jaugée, fiole jaugée) :** la précision Δ est indiquée sur la verrerie (on est quasi-certain que la véritable valeur est dans cette plage $x \pm \Delta$).

  Bien sûr, c'est le cas si on a manipulé parfaitement (ménisque au niveau du trait de jauge par ex.).

> **Exemple :** une pipette jaugée de 25 mL indique une précision de $\pm 0{,}03\,\text{mL}$.
>
> On a donc $\Delta = 0{,}03\,\text{mL}$,
>
> et $u(V) = \Delta/\sqrt{3} = 0{,}03/\sqrt{3} = 0{,}017\,\text{mL}$.
>
> 
>

- **Mesure à l'aide d'un instrument de mesure numérique (voltmètre, ampèremètre, pH-mètre, conductimètre...) :** si on dispose de la notice, on suit ce qui est indiqué car le constructeur donne souvent la précision Δ (on est quasi-certain que la véritable valeur est dans cette plage $x \pm \Delta$).

  Si on ne dispose pas de la notice, on peut alors considérer que la précision Δ est donnée par le dernier chiffre affiché. Par exemple pour un affichage 1,24, alors la mesure est entre 1,23 et 1,25 et donc $\Delta = 0{,}01$.

Exemple : Un conductimètre plongé dans une solution indique une conductivité $\sigma = 12{,}22\,\mathrm{mS/cm}$. Le calibre utilisé est $19{,}99\,\mathrm{mS/cm}$ (c-à-d qu'au delà de cette valeur l'appareil sature).

La notice ci-contre indique que l'exactitude est de $\pm 1\%$ de la pleine échelle, donc il faut comprendre que la précision est $\Delta = \dfrac{1}{100} \times 19{,}99\,\mathrm{mS/cm} = 0{,}20\,\mathrm{mS/cm}$. Puis l'incertitude-type $u(\sigma) = \Delta/\sqrt{3} = 0{,}12\,\mathrm{mS/cm}$.

Remarque : Sans notice, on utilise le fait que l'affichage est précis à $0{,}01\,\mathrm{mS/cm}$ près, ce qui donne aussi la précision $\Delta = 0{,}01\,\mathrm{mS/cm}$. On obtient toujours quelque chose de moins large qu'avec la notice : on sous-estime l'incertitude.

Gamme	0.0 à 199.9 µS/cm / 0 à 1999 µS/cm 0.00 à 19.99 mS/cm / 0.0 à 199.9 mS/cm
Résolution	0.1 µS/cm / 1 µS/cm 0.01 mS/cm / 0.1 mS/cm
Exactitude	±1% pleine échelle (sauf erreur de la sonde) (@20°C)
Etalonnage	Manuel en un point à l'aide d'un potentiomètre
Temperature Compensation	Manuelle de 0 à 50°C avec β=2%/°C
Sonde (incluse)	HI 76300, capteur platine avec 1 m de câble
Alimentation	12 Vdc (adaptateur inclus)
Conditions d'utilisation	0 à 50°C HR max 95% sans condensation
Dimensions	235 x 222 x 109 mm
Poids	1.3 Kg

Exemple : Un voltmètre indique une tension $V_0 = -8{,}45\,\mathrm{mV}$. Le calibre utilisé est de $200\,\mathrm{mV}$.

La notice indique que la précision, pour ce calibre, est de $\pm 0{,}5\% + 10\mathrm{d}$.
Il y a donc deux contributions à la précision Δ :

- $0{,}5\% \times V_0 = 0{,}042\,\mathrm{mV}$.
- Le "d" signifie dernier digit affiché, c-à-d de la plus petite variation perceptible à l'affichage : ici cette plus petite variation est de $0{,}01\,\mathrm{mV}$. On remarque qu'elle dépend du calibre utilisé.

  Ainsi, $10\mathrm{d} = 10 \times 0{,}01 = 0{,}1\,\mathrm{mV}$.

On a donc $\Delta = 0{,}042 + 0{,}1 = 0{,}142\,\mathrm{mV}$.

Puis l'incertitude-type : $u(V_0) = \Delta/\sqrt{3} = 0{,}082\,\mathrm{mV}$.

Remarque : Ici aussi l'incertitude est plus grande que la variation du dernier chiffre affiché sur l'appareil.

TENSION AC	200 mV, 2, 20, 200 V	± 0,5% + 10d	10-100 µV-1-10 mV
	750 V (< 1KHz)	± 0,7% + 10d	100 mV
	750 V (> 1KHz < 5KHz)	± 2,0% + 10d	100 mV

Protection: 500 V AC rms sur calibres 200 mV - 200 V
750 V AC rms sur calibre 750 V
Impédance d'entrée: 10 MΩ, moins de 50 pF
Type de conversion: TRMS

- **Mesure avec un oscilloscope :** La précision d'un oscilloscope dépend du nombre de bit sur lequel est encodée chaque valeur du signal (8 bits, soit 256 valeurs pour nos oscilloscopes qui servent à encoder entre $+V_{\max}$ et $-V_{\max}$), du nombre d'échantillons maximal pris par seconde, du nombre de points sur lequel est numérisé le signal (2500 points pour les nôtres), et de tout le processus de conversion analogique vers numérique.

  Il faut donc consulter la notice. Pour les oscilloscopes utilisés en TP, la précision relative Δ est de l'ordre de :

  - $\pm 4\%$ en vertical (donc pour la tension),
  - $\pm 0{,}5\%$ en horizontal (donc en temps).

  Si le signal est bruité et donc qu'il n'est pas évident de placer les curseurs, ou si les mesures automatiques fluctuent, et que ceci amène à dépasser les incertitudes annoncées ci-dessus, alors la précision doit être donnée par la marge d'erreur de placement des curseurs ou par l'étendue des fluctuations (cf paragraphe "plage" ci-dessus).

  Remarque : Un voltmètre est en général plus précis qu'un oscilloscope pour réaliser une mesure de tension.

  Remarque : Lorsque l'on utilise les curseurs, on pourrait estimer la précision Δ comme étant un ou deux crans de variation des curseurs. Également, lorsque l'on utilise le mode `mesure` on pourrait prendre pour incertitude le dernier chiffre affiché. Dans les deux cas, on sous-estime la précision réelle, parfois de beaucoup.

Remarque : Ci-contre un extrait de la notice de l'oscilloscope utilisé en TP :

Précision de mesure CC, mode d'acquisition par Moyennage	*Type de mesure*	*Précision*
	Moyenne de ≥ 16 signaux, la position verticale étant définie sur zéro	±(3 % × lecture + 0,1 div + 1 mV) lorsque la valeur 10 mV/div ou supérieure est sélectionnée.

Précision de la mesure de temps Delta (Totalité de la bande passante)	*Conditions*	*Précision*
	Monocoup, mode Echantillon	±(1 intervalle d'échantillonnage + 100 ppm × lecture + 0,6 ns)

- **Valeur indiquée (sur des composants) :** lorsque l'on utilise des résistances ou des condensateurs, ou bien des lentilles en optique, on fait confiance à la valeur indiquée par le constructeur. Pour connaître l'incertitude-type sur ces valeurs (qui va dépendre de la qualité et donc du prix des composants), on consulte la notice ou on regarde sur le composant lui-même.

  On peut aussi choisir de mesurer nous-même la valeur en question, avec un ohmmètre par exemple.

  Enfin, par défaut et en l'absence d'indications, on prendra la précision comme portant sur le dernier chiffre indiqué.

  > **Exemple :** La tolérance des résistances électriques est indiquée par la couleur du dernier anneau (ou avant dernier) : $\pm 10\%$ si argent, $\pm 5\%$ si or (typiquement celles utilisées en TP), etc. On considère que ceci donne la précision Δ (on est quasi-certain que la véritable valeur est dans cette plage).
  >
  > Une résistance de $1\,\mathrm{k\Omega}$ avec un anneau or est donc en fait connue à $\Delta = \dfrac{5}{100} \times 1000\,\Omega = 50\,\Omega$ près, d'où l'incertitude-type $u(R) = 50/\sqrt{3} = 29\,\Omega$.

  Remarque : En l'absence de plus d'indication, on peut prendre $\pm 5\%$ pour les capacités, bobines et condensateurs utilisés en TP.

- **Données numériques issues de tables ou d'un énoncé :** si des données ne sont pas assorties d'une incertitude, alors on considère que le dernier chiffre significatif n'est pas certain. Ceci permet d'obtenir la précision (on est quasi-certain que la véritable valeur est dans cette plage).

  > **Exemple :** On lit dans une table $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$, on dira alors que R est compris entre 8,313 et $8{,}316\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$, donc $\Delta = (8{,}316 - 8{,}314)/2 = 0{,}001\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$, et on calcule l'incertitude-type.

  Remarque : On rencontre parfois, sur Wikipedia notamment, la notation avec parenthèses, par exemple : $G = 6.674\,08(31) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$. Ceci signifie que l'incertitude-type est $u(G) = 0{,}000\,31 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.