Correction – TD – Régime transitoire des systèmes du 2$^{\text{nd}}$ ordre

Correction de l'EC 1 (correspond au I.1 du cours)

1 - ⋆ Système : {masse}. Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.
- Réaction du support : $\vec{N} = N\vec{e}_z$ (rien selon $\vec{e}_x$ car on ne tient pas compte des frottements).
- Force du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}}$ avec ici $l = l_0 + x$ (c'est la longueur totale du ressort) et $\vec{u}_{\text{ext}} = \vec{e}_x$ (va du point d'attache du ressort vers l'extérieur).
  D'où $\vec{F} = -k((l_0 + x) - l_0)\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x$.
- Frottements : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, or $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$, donc $\vec{f} = -\lambda\dot{x}\,\vec{e}_x$.

⋆ Accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$ car mouvement selon x uniquement.

⋆ PFD sur la masse : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}$.

On projète sur $\vec{e}_x$ donc il reste $m\ddot{x} = -k\,x - \lambda\dot{x}$, soit $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}\,x = 0.}$

2 - Forme canonique : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec ici par identification :

– $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}.}$

– $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda}{m}$ donc $Q = \omega_0\dfrac{m}{\lambda} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{m}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\dfrac{\sqrt{m}\sqrt{m}}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{k}\sqrt{m}}{\lambda}$.

Donc $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}.}$

Correction de l'EC 2 (correspond au I.2 du cours)

On souhaite résoudre l'équation $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Cas où $Q > 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

1 - ⋆ C'est le cas traité en cours. On obtient

$$\boxed{x(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t},}$$

et pour déterminer la pseudo-pulsation Ω et le facteur μ il faut trouver les racines de l'équation caractéristique.

On obtient (cf cours) :

$$\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

⋆ Utilisation CI1 et CI2 : cf cours, on obtient $A = 0$ et $B = \dfrac{v_0}{\Omega}$, d'où finalement

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\Omega}\,\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

Cas où $Q < 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

⋆ La solution particulière est nulle.

⋆ Équation homogène : régime apériodique, le discriminant est positif et l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1 et r_2, qui donnent la solution :$x_H(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$.
Le discriminant est $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$.
Les racines sont

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)} \\
&= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2} \\
&= -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \\
r_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right)
\end{aligned}$$

⋆ La solution générale est donc

$$\boxed{x(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}.}$$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = 0$.
D'après la solution, on a $x(0) = A + B$.
Donc $A = -B$.

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = v_0$.
Il faut dériver la solution : $\dot{x}(t) = Ar_1\mathrm{e}^{r_1 t} + Br_2\mathrm{e}^{r_2 t}$.
Donc $\dot{x}(0) = Ar_1 + Br_2$.
Donc $Ar_1 + Br_2 = v_0$. Donc $Ar_1 - Ar_2 = v_0$. Donc $A = \dfrac{v_0}{r_1 - r_2}$ et $B = -A$.

⋆ Finalement :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{r_1 - r_2}\left(\mathrm{e}^{r_1 t} - \mathrm{e}^{r_2 t}\right).}$$

Cas où $Q = 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$

⋆ La solution particulière est nulle.

⋆ Équation homogène : régime critique, le discriminant est nul et l'équation caractéristique a une racine double $r_1 = \omega_0$.
La solution est donc $x_H(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.

⋆ Solution générale : $\boxed{x(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = 0$.
D'après la solution, on a $x(0) = B$.
Donc $\boxed{B = 0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = v_0$.
Il faut dériver la solution $x(t) = At\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$: $\dot{x}(t) = A\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + At(-\omega_0)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.
On a donc d'après la solution : $\dot{x}(0) = A$.
Donc $A = v_0$.

⋆ Finalement on a donc

$$\boxed{x(t) = v_0 t\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$