0.1 Axiomatisation de la théorie de la mécanique classique

Il y a bien sur les approches lagrangienne, hamiltonnienne, action et moindre action, etc... que nous ne regardons pas ici.

Comment dérouler une axiomatisation de la mécanique newtonnienne :

— Les définitions cinématiques : référentiel (objet indéformable considéré immobile), temps absolu, coordonnées, trajectoire, vecteur position, vitesse, accélération....

Notion de point matériel.

— Le principe d'inertie : il existe des référentiels privilégiés qui ont la propriété suivante : tout corps isolé (loin de tout) y est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme (le repos en étant un cas particulier).

Ce n'est pas évident.

Si un tel référentiel existe, alors évidemment tous ceux en translation rectiligne uniforme par rapport au premier conviennent aussi.

On appelle l'ensemble de ces référentiels des référentiels galiléens ou inertiels.

(Remarque : la formulation inverse, du type "pour tout corps isolé, il existe un référentiel tel que..." n'est pas correcte, car il existe trivialement un référentiel dans lequel tout corps est au repos (celui lié au corps).)

— Principe de relativité galiléen (mais au final à quoi sert-il ?) : les lois de la mécanique (que nous cherchons) ont la même forme dans tous ces référentiels galiléens, car il est impossible de mener une expérience permettant de mesurer la vitesse d'un référentiel galiléen par rapport à un autre (sous entendu en étant enfermé dans ce référentiel).

— Dans un référentiel galiléen, le mouvement naturel est le mouvement rectiligne uniforme : $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$. Tout écart est donc la mesure d'une action extérieure agissant sur l'objet : d'une interaction.

Notion de force : cette action est descriptible par un vecteur $\boldsymbol{F}$ auquel est proportionnel le changement $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$. Dit dans l'autre sens, le changement $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ est proportionnel à un agent externe, la force $\boldsymbol{F}$.

Mais ce n'est pas la seule proportionnalité : en effet, pour un champ de force donné (par exemple action d'un ressort donné d'allongement donné sur différents objets), la variation $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ sera d'ampleur différente. Cette variation est donc aussi proportionnelle à un agent interne à l'objet : sa masse inertielle.

Il s'agit donc là d'une double définition, celle de la masse inertielle et de la force : $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$.

— Le principe des actions réciproques (essentiel pour passer à la mécanique des systèmes, car attention jusqu'ici nous raisonnions sur un point matériel), valable lorsqu'un point matériel exerce une force sur un autre point matériel.

De là on définit les grandeurs énergétiques et on démontre les théorèmes afférant, on définit le moment cinétique, le moment d'une force, on démontre le théorème du moment cinétique, on généralise à un système de N points, puis à un solide, à un fluide...

Revenons tout de même sur les définitions de la masse inertielle et de la force $\boldsymbol{F}$ via la relation $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$, car cela donne l'impression que le PFD est simplement une définition. Vu sous cet angle c'en est bien une, mais une qui fonctionne (d'autres choix seraient possibles !), et qui est la traduction du constat empirique que le produit $m\boldsymbol{a}$, où $\boldsymbol{a}$ est une grandeur cinématique et m une grandeur constante intrinsèque à l'objet, est *une fonction uniquement de la configuration extérieure à l'objet* (de la position, vitesse... des objets l'entourant) :

$$m\boldsymbol{a} = \Phi(X), \tag{1}$$

où X est la configuration extérieure au point matériel étudié. X dépend des positions et vitesses des autres points. C'est ainsi l'expérience qui justifie que la dérivée seconde de la position est fonction des coordonnées et vitesses seulement, ce qui rend non nécessaire de considérer des dérivées d'ordre supérieur. Quant à la première loi de Newton, elle peut être vue comme l'annulation à l'infini de cette fonction Φ. De ce point de vue la force est un concept jouant le rôle d'intermédiaire pratique entre $m\boldsymbol{a}$ et la fonction Φ(configuration ext).

Pour bien comprendre, il est intéressant de voir comment la définition $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\boldsymbol{F}}{m}$ permet la mesure de $\boldsymbol{F}$ et de m.

- Pour m, seuls les rapports de masse sont mesurables (par définition d'une mesure : on mesure par rapport à une unité, donc une référence). Ainsi dans le système de grandeurs utilisé, il faut se donner une définition d'étalon de masse, par exemple une masse en platine iridié, ou encore la définition de 2018. Alors étant donné un étalon matériel m_0, on peut comparer l'accélération d'une masse m inconnue par rapport à celle de m_0 par une même force $\boldsymbol{F}$ (cette force peut être celle d'un même ressort, c'est d'ailleurs ainsi que fonctionne la balance à astronautes de l'ISS) [a].
- Quant à $\boldsymbol{F}$, elle est mesurée via une mesure de m et de $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

  On peut par exemple mesurer l'évolution temporelle $x(t)$ d'une masse m inertielle connue accrochée à un ressort horizontal, sans frottement. Alors les données (le calcul de $\ddot{x}$) montrerons que le ressort exerce une force $\boldsymbol{F} = -k(x(t) - l_0)\boldsymbol{e}_x$ avec k ainsi mesurable.

  On peut mesurer la force de frottement de la même manière.

  On peut également mesurer des trajectoires de chute libre, qui montrent que l'accélération est constante en tout point (sans frottements) pour un objet donné, et on peut la mesurer. On en déduit la valeur du poids d'un objet. On voit même que des objets de masse inertielle différentes tombent avec la même accélération, ce qui ne peut être le cas que si le poids est proportionnel à la masse inertielle : $P = mg$ avec g cette constante. D'autre part la statique (les balances ou les ressorts) permettent de définir une masse grave à laquelle est proportionnelle le poids. C'est donc que $m_{\text{inertiel}} = \alpha m_{\text{grave}}$, et pour simplifier on prend $\alpha = 1$, mais c'est là un choix de système possible sans préjuger de la nature identique ou non des deux type de masses. Avec ceci le poids devient $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ et le PFD $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g}$, ce qui permet une mesure de $\boldsymbol{g}$.

  Ainsi toute force est mesurable dynamiquement. La statique est ensuite contenue dans le PFD, qui indique par exemple pour une masse accrochée verticalement à un ressort que $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Les définitions et mesures de la statique, que l'on peut fonder indépendamment (Archimède) correspondent donc naturellement avec celles de la dynamique et sont incluses dans la dynamique.

Redisons pour finir, car c'est important, que la force est définie dynamiquement (ce qui inclut le cas statique), et que la masse inertielle est une propriété qui mesure la résistance intrinsèque à l'écart au mouvement rectiligne uniforme et qui est quantifiée par le PFD. La masse grave est autre chose : elle quantifie la force de l'interaction gravitationnelle.

Cette définition de la force est d'ailleurs celle donnée dès Newton, qui résume le schéma que nous venons d'exposer dans la préface de la première édition des *Principia* :

> "I offer this work as the mathematical principles of philosophy, for the whole burden of philosophy seems to consist in this – from the phenomena of motions to investigate the forces of nature, and then from these forces to demonstrate the other phenomena."

a. La question de la définition de m indépendamment de la mesure de force a été étudiée par Mach (1943). Le cas du ressort ci-dessus est un exemple particulier de procédure (qui fonctionne), mais Mach considère des configurations plus générales. Voir aussi Jammer p245-47 et 220).

Bien sûr le concept de force comme celui de gravitation, ou électrostatique, est à distance et possède les limites que l'on connaît et qui fit longtemps débat, depuis les recherches scholastiques des penseurs médiévaux sur la cause du mouvement, à Descartes, etc. Mais Newton lui-même considère son concept de force à juste titre comme un concept, au sens épistémologique moderne, et non pas comme un existant en soi. Il précise

> "[produced by ...] or anything else that does not yet appear. For I here design only to give a mathematical notion of those forces without considering their physical causes and seats." (Jammer p125)

Cette position est un trait de génie, et Einstein dira très justement :

> "Newton himself was better aware of the weaknesses inherent in his intellectual edifice than the generations of learned scientists which followed him. This fact has always aroused my deep admiration."

Citons encore Newton :

> "that one body may act upon another at a distance throught a vacuum, without the mediation of anything else, [...] is to me so great an absurdity that I believe no man, who in philosophical matter has a competent faculty of thinking, can ever fall into it."

0.2 Et en RR et RG ?

En relativité restreinte rien ne change fondamentalement.

En RG :

- En mécanique classique, le lien $ma = \Phi(X)$ où X est la configuration extérieure à l'objet est un postulat de la théorie. Ceci signifie qu'il est mystérieux et n'a pas d'explication.
- En RG ce lien est explicité, du moins pour la force de gravitation : les objets suivent des géodésiques dans l'espace-temps. La gravitation devient un effet fictif lié à l'utilisation d'un référentiel non adéquat, d'une métrique inappropriée, comme peut l'être la force centrifuge dans un référentiel non galiléen en mécanique classique.

  La notion (relationnelle) de force, comme intermédiaire, n'est plus nécessaire.

  Mais le mystère n'est que reporté : cette fois a est reliée à X où X devient la configuration locale de l'espace-temps, elle-même déterminée par la configuration extérieure à l'objet (et à l'objet lui-même) via l'équation d'Einstein.