Fiche méthode
Maths

Outils mathématiques (1)

I Trigonométrie

Propriétés à connaître

$\sin = \frac{\text{op}}{\text{hyp}}$ (soh) | $\cos = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ (cah) | $\tan = \frac{\text{op}}{\text{adj}}$ (toa) $\Rightarrow$ "SohCahToa"

Fonctions :

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$

Valeurs remarquables :

- $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$
- $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$
- $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$
- $\cos(-\pi/2) = 0$ et $\sin(-\pi/2) = -1$

Remarque : Valeurs à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique.

Additions :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

En prenant $b = a$ on a donc :

- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

Formules avec π :

- $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$
- $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$

Formules avec $\pi/2$:

- $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$

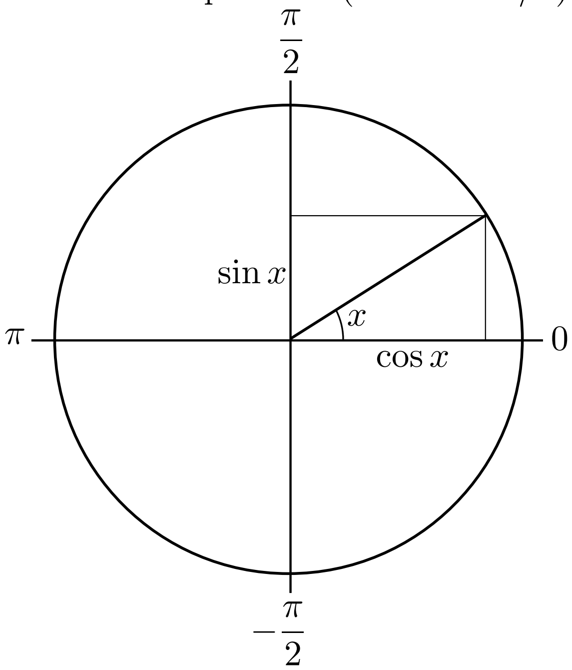
Remarque : À savoir retrouver avec un cercle trigonométrique, ou avec les formules d'additions ci-dessus (prendre $a = x$ et $b = \pi$ ou $b = \pi/2$).

Autres formules pas à connaître :

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Pour d'autres formules encore, cf par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_trigonom%C3%A9trique#Relations_trigonom%C3%A9triques

Le cercle trigonométrique permet de rapidement retrouver les valeurs remarquables, et les formules pour $\cos(x \pm \pi \,\text{ou}\, \pi/2)$, $\sin(x \pm \pi \,\text{ou}\, \pi/2)$.



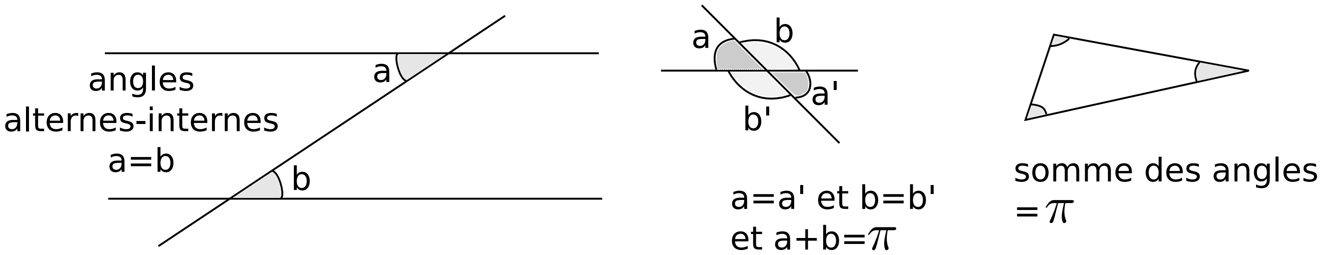
Exercices pour s'entraîner :

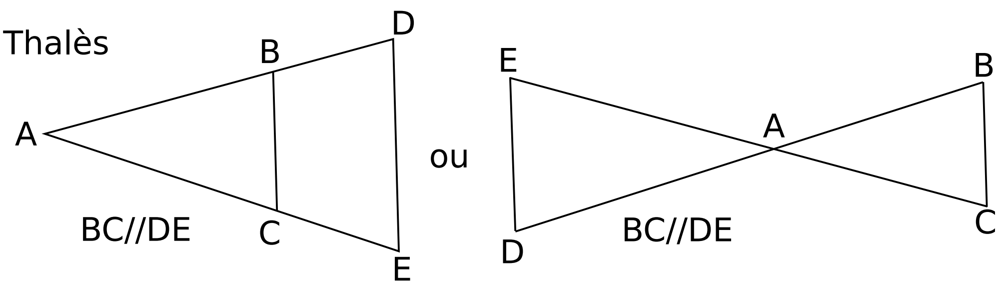
1 - $\cos(\omega t - kx + \pi/2) = \pm \sin(\omega t - kx)$? (choisir le bon signe)

2 - $\cos(\omega t - kx + \pi) = \pm \cos(\omega t - kx)$? (choisir le bon signe)

3 - Exprimer $\sin(\omega t - kx)$ à l'aide d'un cosinus uniquement.

II Géométrie, exemples

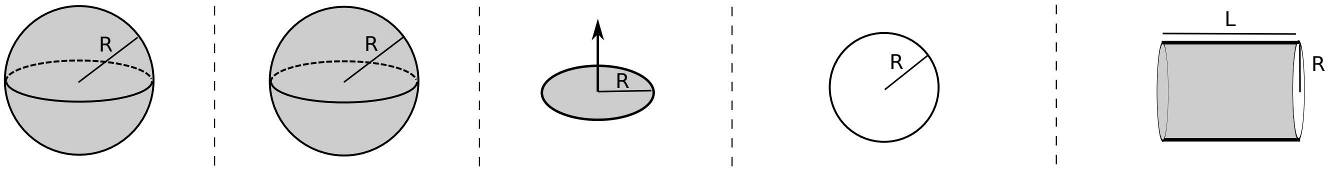




$$\Rightarrow \quad \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

III Volumes, surfaces, périmètres

À connaître (et surtout, attention à l'homogénéité : le volume est forcément en R^3, la surface en R^2, le périmètre en R, etc).



volume d'une boule	aire d'une sphère	aire d'un disque	circonférence d'un cercle	surface latérale d'un cylindre
$\frac{4}{3}\pi R^3$	$4\pi R^2$	πR^2	$2\pi R$	$2\pi R \times L$

IV Manipuler les fractions, résoudre des équations

Exercices pour s'entraîner :

Mettre sous une forme simplifiée ou au même dénominateur :

1 - $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}$, **2 -** $\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}}$, **3 -** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$, **4 -** $\dfrac{1}{OA'} - \dfrac{1}{OA}$

5 - Isoler x : $\dfrac{1}{x+d} - \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{f'}$

6 - On considère le système d'équations suivant, où c_p et c_s sont des vitesses, d une distance et t_0, t_s et t_p des temps :

$$\begin{cases} c_s = \dfrac{d}{t_s - t_0} \\ c_p = \dfrac{d}{t_p - t_0} \end{cases}$$

Les inconnues sont d et t_0. Exprimer les en fonction de c_p, c_s, t_p et t_s.

La réponse à laquelle il faut aboutir est $t_0 = \dfrac{c_p t_p - c_s t_s}{c_p - c_s}$ et $d = \dfrac{c_s c_p (t_s - t_p)}{c_p - c_s}$.

On donne $c_s = 4{,}32\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $c_p = 7{,}74\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $t_p = 3\text{h}02\text{min}04\text{s}$, et $t_s = 3\text{h}02\text{min}52\text{s}$. Faire l'application numérique pour d.

7 - On considère le système d'équations suivant, où f_1, f_2 et f_0 sont des fréquences, et c et v des vitesses :

$$\begin{cases} f_1 = f_0 \times \dfrac{c}{c - v} \\ f_2 = f_0 \times \dfrac{c}{c + v} \end{cases}$$

Les inconnues sont f_0 et v. Exprimer les en fonction de c, f_1 et f_2.

La réponse à laquelle il faut aboutir est $v = c\,\dfrac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$ et $f_0 = \dfrac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2}$.

Faire l'application numérique pour $c = 340\,\mathrm{m/s}$, $f_1 = 350\,\mathrm{Hz}$ et $f_2 = 575\,\mathrm{Hz}$.

V Résoudre une équation du second degré

Propriétés

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \geq 0$, les deux solutions réelles sont $x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, les deux solutions complexes sont $x_\pm = \dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercices pour s'entraîner :

L'inconnue est x, trouver les solutions réelles lorsqu'elles existent :

1 - $2x^2 - dx - d^2 = 0$

2 - $\dfrac{1}{D - x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f'}$ Toutes les grandeurs sont des distances positives. Donner une condition pour qu'elle admette des solutions réelles. Lorsque cette condition est satisfaite, donner l'expression des deux solutions.

VI Exponentielle et logarithme

Propriétés de l'exponentielle

$$(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{a\times b}$$
$$\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$$
$$\frac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$$
$$\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$$
$$\mathrm{e}^{\ln x} = \ln(\mathrm{e}^x) = x$$
$$\mathrm{e}^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$$

Propriétés du logarithme

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$
$$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$$
$$\ln(1/b) = -\ln b$$
$$\ln(a^n) = n\,\ln a$$
$$\ln(1) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

De plus, la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$.

Ci-dessus il s'agit du logarithme népérien, fonction réciproque de l'exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ (donc $\ln(\mathrm{e}^x) = x$).

Il y a aussi le logarithme décimal, défini comme $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Les propriétés ci-dessus sont les mêmes.
log est la fonction réciproque de $x \mapsto 10^x$ (donc $\log(10^x) = x$, et par exemple $\log 10 = 1$, $\log 10^2 = 2$, etc).

Exercices pour s'entraîner

1 - On considère la fonction $f(t) = f_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Donner l'expression du temps t au bout duquel on a $f(t) = f(0)/2$ (aussi appelé temps de demi-vie, ou de demi-réaction).

2 - On considère la fonction $f(t) = A(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$. Donner l'expression du temps t au bout duquel on a $f(t) = 0{,}99A$.

VII Puissances

Propriétés

$$(x^a)^b = x^{a\times b}$$
$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$
$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$
$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Autres propriétés

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$
$$x^a = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{a}}$$

Remarque : La dernière propriété se démontre facilement :

$$x^a = y \quad \Leftrightarrow \quad (x^a)^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad x^{a\times\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{a}}.$$

Exercices pour s'entraîner

Donner le résultat des valeurs suivantes sous la forme 10^n. Par exemple dans le premier cas on doit trouver 10^{-1} :

1 - $\dfrac{10^3 \times 10^{-10}}{(10^{-2})^3}$, **2 -** $\dfrac{(10^4)^2 \times 10^{-34}}{(10^{-1})^2 \times (10^{0,5})^2}$, **3 -** $\dfrac{\sqrt{10^3 \times 10^5}}{(10^8)^{1/4}}$

Écrire les expressions ci-dessous sous la forme de x élevé à une certaine puissance. Par exemple dans le premier cas on doit arriver à x^{-3a} :

4 - $\left(\dfrac{1}{x^a}\right)^3$, **5 -** $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^a}\right)^4$, **6 -** $x \times \sqrt{x}$

VIII Calculs de dérivées

Propriétés de la dérivation

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$
$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$
$$(g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x))$$

Dérivées usuelles

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

IX Primitives et intégrales

Primitives

Propriétés importantes

Soit $f(t)$ une fonction. Une primitive de f est une fonction F telle que sa dérivée redonne f :

$$F'(t) = f(t).$$

Exemple : $f(t) = t$. Une primitive est $F(t) = \dfrac{t^2}{2}$, car on a bien $F'(t) = t$.

Les primitives sont toujours à une constante près.
Par exemple ci-dessus, $F(t) = \frac{t^2}{2} + 5$ convient aussi.

Primitives usuelles

$$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1} + A$$
$$\cos x \to \sin x + A$$
$$\sin x \to -\cos x + A$$
$$\mathrm{e}^x \to \mathrm{e}^x + A$$
$$\frac{1}{x} \to \ln x + A$$

Avec A une constante d'intégration.

Lorsqu'on écrit une primitive, on vérifie à chaque fois que c'est bien correct en la dérivant : il faut alors retomber sur la fonction de départ !

Exercices pour s'entraîner : Pour chaque fonction $f(t)$ proposée ci-dessous, on demande a/ de trouver une primitive $F(t)$; puis b/ de dériver cette primitive (donc calcul de $F'(t)$) pour vérifier que l'on retombe bien sur $f(t)$ et que la primitive proposée en a/ est correcte.

1 - $f(t) = \cos(\omega t)$

2 - $f(t) = \sin(\omega t)$

3 - $f(t) = \mathrm{e}^{a\,t}$

4 - $f(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}$

5 - $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

6 - $f(t) = \cos(4\omega t + \varphi)$

7 - $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1$

Exemple de rédaction attendue pour la question 1 :
– $f(t) = \cos(\omega t)$
– a/ Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$.
– b/ Vérification par calcul de $F'(t)$: $F'(t) = \dfrac{\omega\cos(\omega t)}{\omega} = \cos(\omega t) = f(t)$, c'est donc correct.

Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes. Les questions 9 à 12 correspondent au calcul de la valeur moyenne ou quadratique de certains signaux, avec $T = 2\pi/\omega$, et sont intéressantes pour les chapitres sur les ondes.

8 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t.$

9 - $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

10 - $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

11 - $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

12 - $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

Pour les $\cos^2$ et $\sin^2$, on linéarisera en utilisant certaines des formules pour $\cos(2a)$ données dans l'encadré précédent.

Les réponses auxquelles il faut parvenir sont, dans l'ordre : τ, 0, 0, $\dfrac{s_0^2}{2}$ et $\dfrac{s_0^2}{2}$.

X Développements limités

DL à connaître

- $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\simeq} 1+\alpha x$

  et si $\alpha=-1$: $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{\simeq} 1-x$
- $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\simeq} 1+x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} x$
- $\cos x \underset{x\to 0}{\simeq} 1-\dfrac{x^2}{2}$
- $\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x$
- $\tan x \underset{x\to 0}{\simeq} x$

(on a omis d'ajouter le $\mathrm{o}(x)$ ou $\mathrm{o}(x^2)$ comme en mathématique)

Ces développements limités proviennent de la formule de Taylor. Pour une fonction $f(x)$,

- À l'ordre 1 : $f(x) \underset{x\to 0}{\simeq} f(0)+x\,f'(0)+\mathrm{o}(x).$
- À l'ordre 2 : $f(x) \underset{x\to 0}{\simeq} f(0)+x\,f'(0)+\dfrac{x^2}{2!}f''(0)+\mathrm{o}(x^2).$

Et si on souhaite écrire un développement de Taylor ailleurs qu'en $x=0$, mais en x quelconque, pour un $\mathrm{d}x$ petit :

- À l'ordre 1 : $f(x+\mathrm{d}x) \underset{\mathrm{d}x\to 0}{\simeq} f(x)+\mathrm{d}x\,f'(x)+\mathrm{o}(\mathrm{d}x).$

(en mathématiques $\mathrm{d}x$ est souvent noté h, et si on isole $f'(x)$ on trouve la définition de la dérivée : $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$)