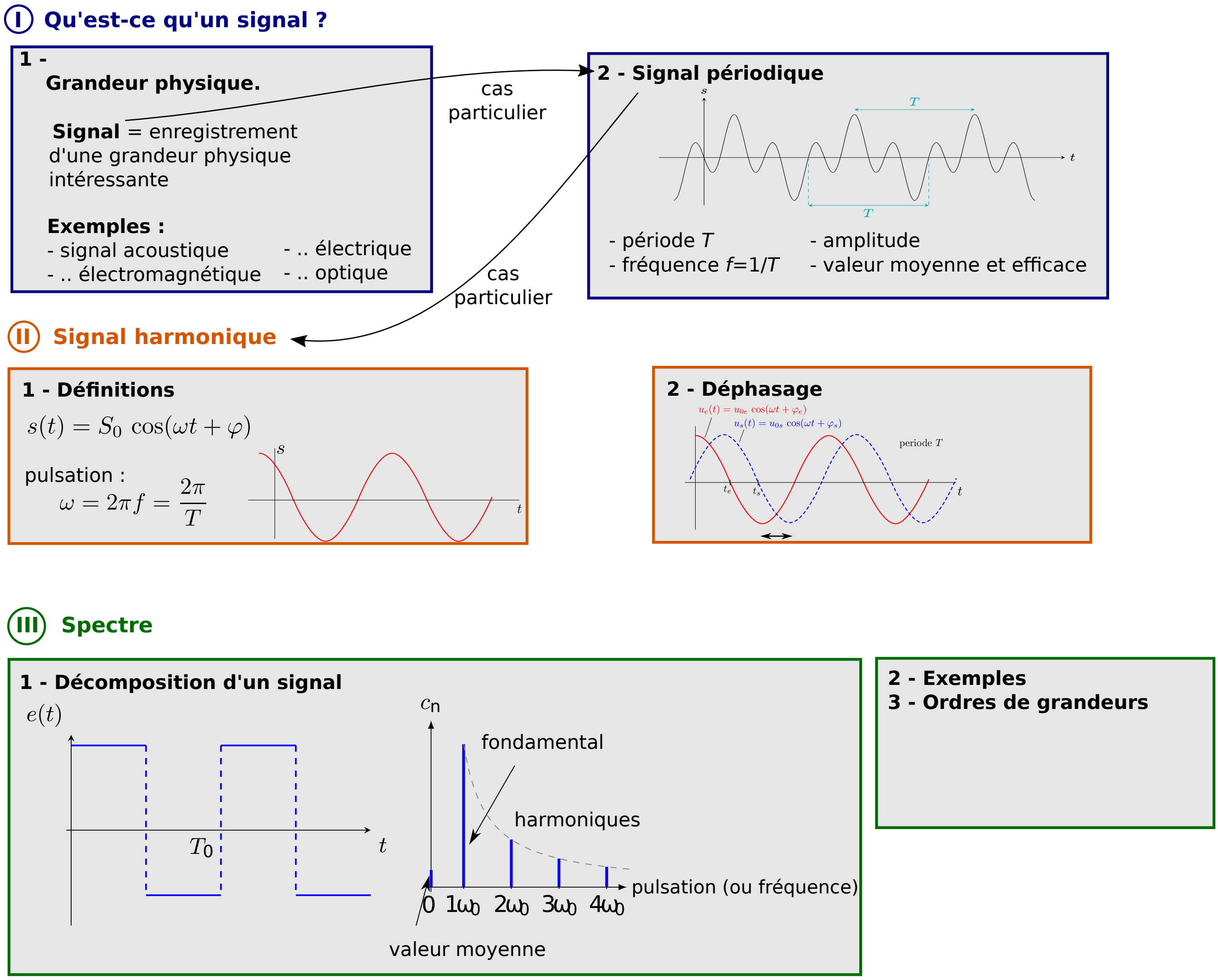
Partie I : Signaux et ondes
Chapitre 1

Signal et spectre



Ce qu'il faut connaître

(cours : I)

►$_1$ Quelle est la relation entre la fréquence d'un signal périodique et sa période ?

►$_2$ Quelle est la relation de définition de la valeur moyenne d'un signal périodique ?

►$_3$ Quelle est la relation de définition de la valeur efficace d'un signal périodique ?

(cours : II)

►$_4$ Quelle est l'écriture mathématique générale d'un signal harmonique ? Nommer les différents paramètres qui y interviennent. Tracer l'allure du signal.

►$_5$ Quelle est la relation entre la pulsation et la fréquence ? et entre la pulsation et la période ?

(cours : III)

►$_6$ Citer des ordres de grandeurs de fréquences dans le domaine de l'acoustique et de l'électromagnétisme. Par exemple quel est le domaine des fréquences acoustiques audibles ?

Ce qu'il faut savoir faire

(cours : I)

►$_7$ Associer une grandeur physique à certains types de signaux courants → **EC1**

▶8 Identifier les caractéristiques d'un signal $s(t)$ sur un tracé. → **EC2**

▶9 Calculer une valeur moyenne ou efficace sur un signal simple. → **EC3**, TD III

———— (cours : II)

▶10 Déphasage :

Reconnaître sur un tracé si un signal est en avance ou en retard par rapport à un autre.

Donner la valeur d'un déphasage étant donnée la valeur du décalage temporel entre deux signaux synchrones (donc de même période). → TD IV

———— (cours : III)

▶11 Exploiter le spectre d'un signal. → **EC4**, TD V

Exercices de cours

Exercice C1 – Associer une grandeur physique à certains types de signaux courants

Donner des grandeurs physiques associées aux signaux suivants :

1 - signal acoustique ;

2 - signal électromagnétique ;

3 - signal électrique ;

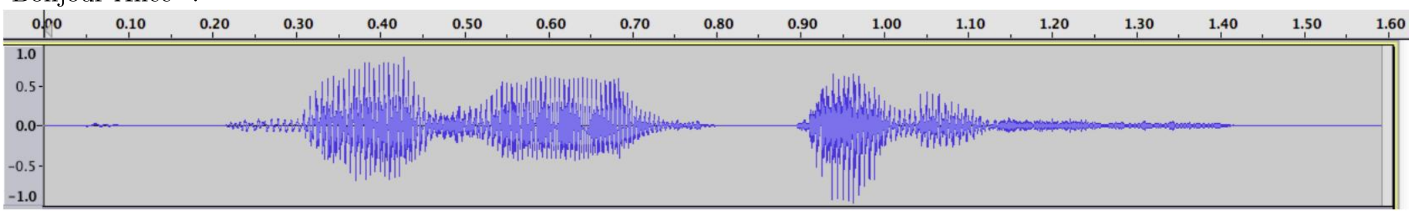
4 - signal lumineux.

Exercice C2 – Identifier les caractéristique d'un signal $s(t)$ sur un tracé

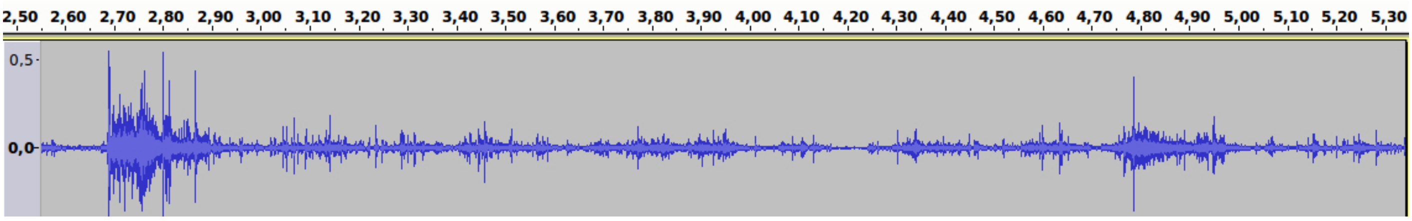
On donne ci-dessous les chronogrammes de quatre signaux sonores : les mots "Bonjour Alice" prononcés par quelqu'un, le son produit par un papier froissé, une note tenue au saxophone, et la tonalité d'un ancien téléphone fixe. L'axe des abscisses est gradué en secondes.

1 - Pour chacun des signaux, indiquer s'il semble périodique sur la durée d'acquisition, et si oui mesurer sa période et calculer sa fréquence.

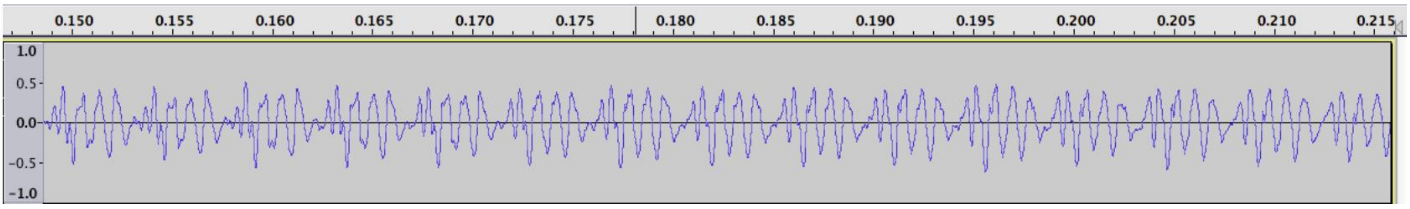
"Bonjour Alice" :



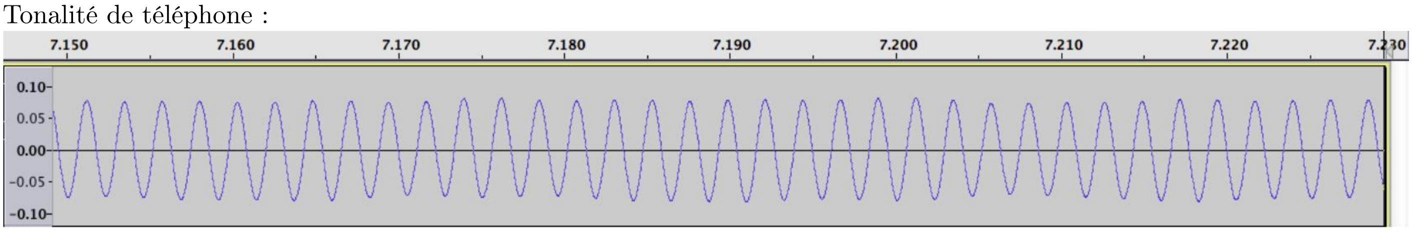
Papier froissé :



Saxophone :



Tonalité de téléphone :



(Source : Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr)

Correction :

Seuls les signaux du saxophone et du téléphone sont périodiques.
Saxophone : on mesure 10 périodes pour plus de précision : $10T = 45\,\text{ms}$ donc $T = 4,5\,\text{ms}$. On en déduit $f = 1/T = 222\,\text{Hz}$.
Téléphone : on mesure $T = 2,3\,\text{s}$ et donc $f = 433\,\text{Hz}$.

Exercice C3 – Calculer une valeur moyenne

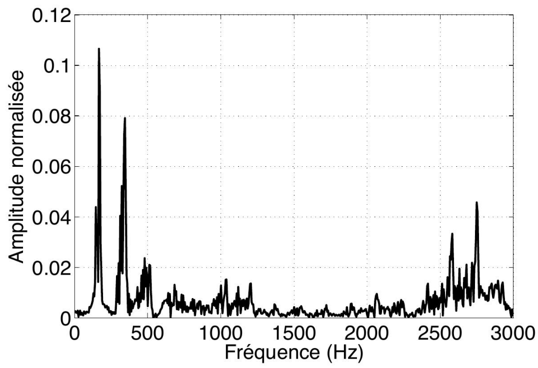
On considère un signal créneau de période $T = 10\,\text{s}$, de valeur minimale $0\,\text{V}$ et maximale $5\,\text{V}$.

1 - Calculer sa valeur moyenne.

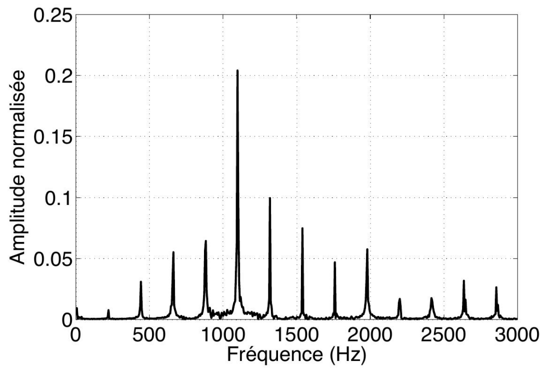
Exercice C4 – Exploiter le spectre d'un signal

On donne ci-dessous les spectres des quatre signaux de l'exercice de cours C2.

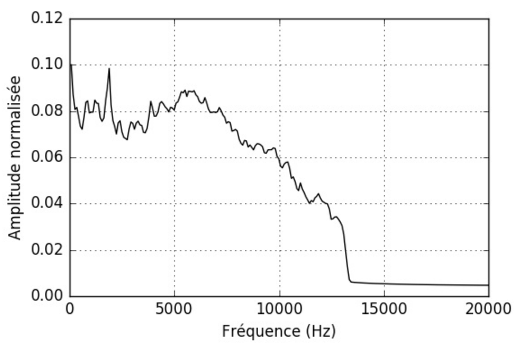
"Bonjour Alice" :



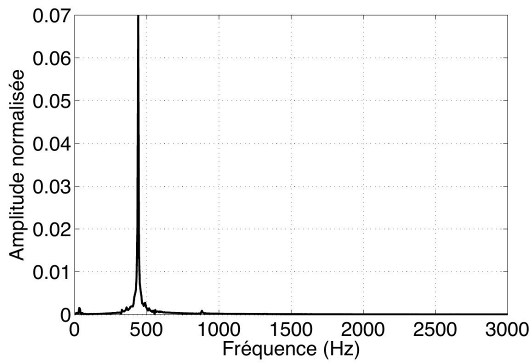
... :



Papier froissé :



... :



(Source : Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr)

1 - Compléter l'identification en attribuant le bon signal au saxophone et à la tonalité de téléphone.

2 - Quelle est la fréquence de la note jouée par le saxophone ? Et celle de la tonalité du téléphone ?

3 - Que dire des pics à basse fréquence sur le signal "bonjour Alice" ?

Correction :

1 - Tonalité de téléphone : en bas à droite, car on voit sur l'enregistrement que le signal semble sinusoïdal (donc il n'y a que le fondamental dans le spectre).

Saxophone : en haut à droite. Le signal n'est pas purement sinusoïdal, donc il y a présence d'harmoniques.

2 - Fréquence de la note jouée par le saxophone : le fondamental est à $250\,\text{Hz}$.

Téléphone : à $400\,\text{Hz}$ environ.

On retrouve bien ce qu'on avait mesuré sur les enregistrements $s(t)$ dans l'EC2.

3 - Les pics à basse fréquence sur le signal "bonjour Alice" correspondent aux fréquences naturelles de la voix humaines (cordes vocales qui vibrent).

Le cours

I – Qu'est-ce qu'un signal ?

1 – Grandeur physique et signal

Définition

Grandeur physique : C'est une propriété d'un phénomène, d'un évènement, d'un corps, que l'on peut exprimer par une mesure.

Exemples : la position, la vitesse, la pression, la température, la masse, la charge électrique, une force, etc.

Définition

Signal : Il s'agit de l'enregistrement d'une grandeur physique intéressante.

"Intéressante" est une notion subjective. Une grandeur peut être intéressante pour traiter un problème, mais pas pour un autre.

Exemples de signaux :

Type de signal	Grandeurs physiques associées
signal acoustique	pression acoustique p, vitesse du fluide v
signal électromagnétique	champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$
signal électrique	courant électrique i et tension électrique u
signal lumineux	champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$

2 – Cas particulier : le signal périodique

a/ Définition, période et fréquence

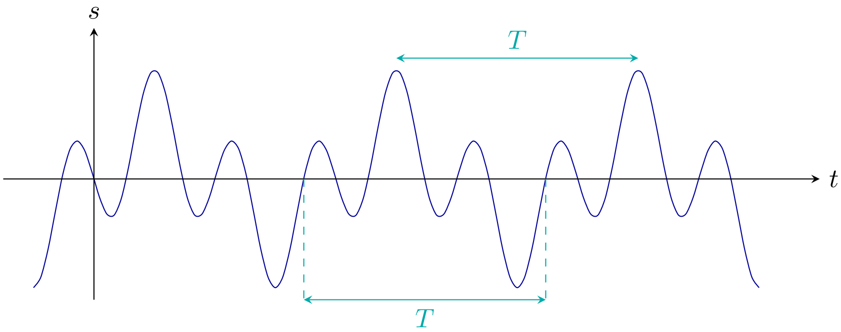
Définition

Signal périodique : Un signal est périodique s'il se répète au bout d'un temps T.

Période T : Il s'agit du plus petit temps tel que $s(t+T) = s(t)$. Unité S.I. : seconde.

Fréquence : $\boxed{f = \frac{1}{T}}$. Donne le nombre de répétitions du signal par unité de temps. Unité S.I. : s^{-1} ou Hz (hertz).

Exemple :

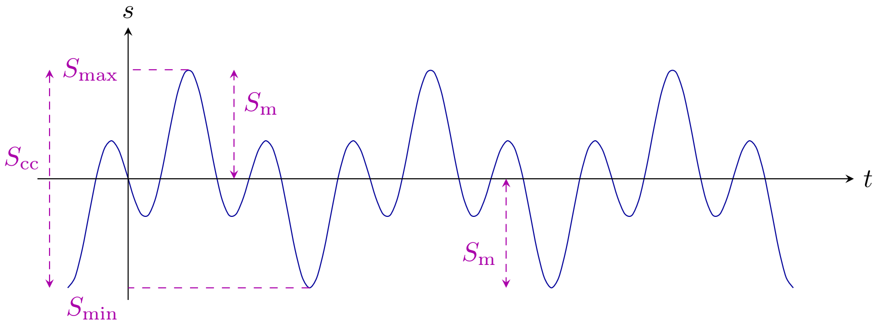


→ Voir **EC2** pour d'autres exemples.

b/ Amplitudes

Les grandeurs suivantes permettent de caractériser un signal périodique :

- Les valeurs minimale $S_{\min}$ et maximale $S_{\max}$.
- La valeur crête à crête $S_{cc} = S_{\max} - S_{\min}$.
- L'amplitude S_m dans le cas où le signal est symétrique.



c/ Valeur moyenne

Considérons le signal périodique ci-contre.

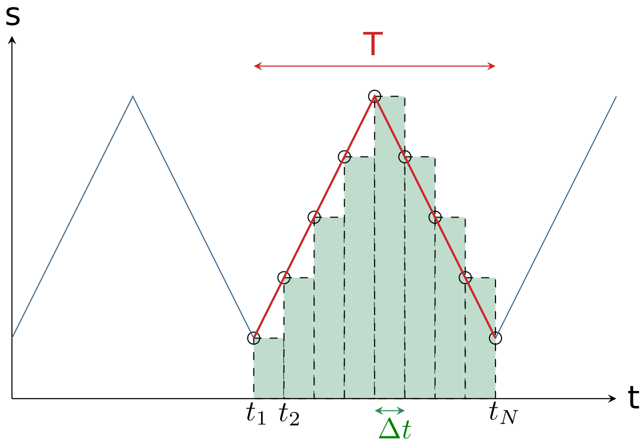
Sa valeur moyenne est égale à la valeur moyenne sur une période.

On peut la calculer de manière approchée en considérant des instants t_1, t_2, ..., t_N comme sur la figure ci-contre.

La valeur moyenne vaut alors :

$$\langle s(t)\rangle \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1} s(t_i).$$

(on fait simplement la moyenne des points ; on ne compte pas $s(t_N)$ car il est identique à $s(t_1)$).



On comprend bien que plus on prend un nombre N de points grand, plus on aura une approximation précise de ce qu'est la valeur moyenne. En fait, pour avoir la valeur exacte, il faut que $N \to +\infty$, et nous allons voir que ceci fait apparaître une intégrale.

Faisons pour cela quelques manipulations. On introduit d'abord l'écart Δt :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{(N-1)\Delta t}\sum_{i=1}^{N-1} s(t_i)\Delta t$$

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N-1} s(t_i)\Delta t.$$

On passe ensuite à la limite où $N \to +\infty$, donc où $\Delta t \to 0$. La somme devient alors égale à l'aire sous la courbe, et est donnée par l'intégrale suivante (cf méthode des rectangles en mathématique) :

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{N} s(t_i)\Delta t = \int_{t_1}^{t_N} s(t)\mathrm{d}t.}$$

On obtient donc : $\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_N} s(t)\mathrm{d}t.$

Finalement, on retiendra ce qui suit :

Définition

Valeur moyenne d'un signal $s(t)$ de période T :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(indépendant du choix de } t_0\text{)}$$

Propriétés

Vue la définition de la moyenne et les propriétés de l'intégrale, on a :

- $\langle s_1(t) + s_2(t)\rangle = \langle s_1(t)\rangle + \langle s_2(t)\rangle$
- Pour toute constante λ : $\langle \lambda s(t)\rangle = \lambda\langle s(t)\rangle$

Mais attention, $\langle s_1(t)\times s_2(t)\rangle \neq \langle s_1(t)\rangle \times \langle s_2(t)\rangle$!

Exemple : calcul pour un signal créneau (cf **EC3**).

d/ Valeur efficace

Définition

Valeur efficace de $s(t)$:

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)^2 \mathrm{d}t}.$$

Remarque :

- On l'appelle aussi valeur RMS pour "Root Mean Square".
- Si on omet la racine carrée, on parle de valeur quadratique moyenne (donc pour la quantité $\langle s(t)^2 \rangle$).
- La valeur efficace intervient lorsqu'on s'intéresse à l'énergie d'un signal, car souvent il apparaît un carré. Par exemple avec l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2(t)$, alors $\langle E_c \rangle$ fait intervenir la moyenne quadratique de v.

On a $\langle (s_1(t) + s_2(t))^2 \rangle = \langle s_1(t)^2 + 2s_1(t)\, s_2(t) + s_2(t)^2 \rangle \neq \langle s_1(t)^2 \rangle + \langle s_2(t)^2 \rangle$, donc les valeurs efficaces ne s'ajoutent pas !

Exemple : calcul pour un signal créneau (cf **EC3**).

II – Signal harmonique

1 – Définitions

Définition

Signal harmonique : signal s'écrivant comme

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Avec :

- S_0 l'amplitude,
- ω la pulsation (unité S.I. : radian par seconde, rad/s),
- φ la phase à l'origine (unité S.I. : radian) ; elle donne la valeur initiale du signal : $s(0) = S_0 \cos(\varphi)$. Elle est définie à 2π près.

Propriétés

On a $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$.

Démonstration : $\cos(\omega(t+T) + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \omega(t+T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \omega T = 2k\pi$,
or la période est le plus petit temps (positif par convention) pour lequel il y a répétition, donc il faut prendre $k = 1$ et on a donc $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
On utilise ensuite $f = 1/T$ pour obtenir la relation $\omega = 2\pi f$.

Autres écritures :

- $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$
- $s(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ (même ω dans le cos et dans le sin)

Par abus de langage, on dit aussi parfois qu'un signal $s(t) = S_1 + S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est aussi un signal harmonique, même s'il y a présence d'un terme constant S_1.

Une animation permettant de faire varier les paramètres : https://www.geogebra.org/m/xvtS8qV8.

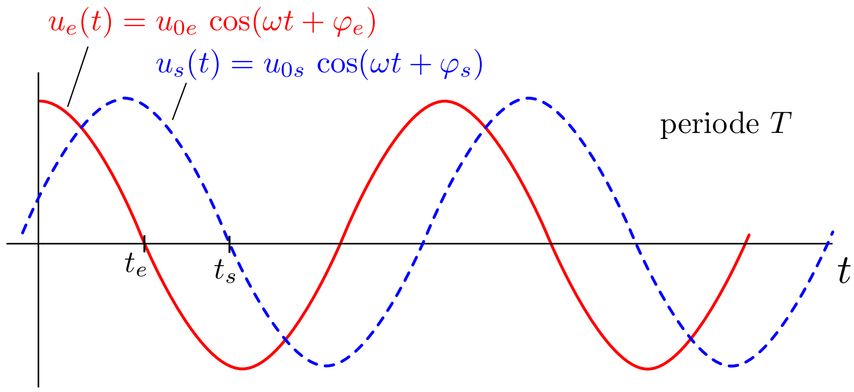
Valeur moyenne et efficace :
On peut calculer (en utilisant la définition avec l'intégrale) que :

- $\langle\cos(\omega t+\varphi)\rangle = 0$,
- $\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\rangle = \dfrac{1}{2}$

Donc si $s(t) = S_0\cos(\omega t+\varphi)$, alors
$$\langle s(t)\rangle = S_0\langle\cos(\omega t+\varphi)\rangle = 0$$
et
$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2\rangle} = \sqrt{S_0^2\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\rangle} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}.$$

2 – Déphasage entre signaux harmoniques

On considère deux signaux sinusoïdaux de même période, et donc de même pulsation ω :



Les signaux ayant même pulsation, ils sont dits **synchrones**.

Définition

Le déphasage du signal u_s par rapport au signal u_e est défini comme $\boxed{\varphi = \varphi_s - \varphi_e.}$

Méthode : mesurer un déphasage entre deux signaux
On repère deux instants consécutifs (les plus proches possibles) où les signaux passent par 0. On les note t_e et t_s.
Le signal d'entrée sert de référence.
Le déphasage entre sortie et entrée est donné par :
$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \omega(t_e - t_s)$$

Remarques :

- À la place de deux passages par 0, on peut tout aussi bien choisir deux maximum, ou deux minimum. C'est même obligatoire si les signaux ne sont pas centrés sur 0 (pas de moyenne nulle).
- Tout comme φ_s et φ_e, le déphasage est défini à 2π près.
- Sur l'exemple ci-dessus, la sortie est en retard sur l'entrée, car elle passe par 0 après l'entrée (t_s est après t_e). On a alors $t_s > t_e$ et donc $\varphi_s - \varphi_e < 0$.

  Exemple : $\varphi_e = 0$ et $\varphi_s = -\pi/3$, alors $u_s(t) = u_0\ \cos(\omega t - \pi/3)$, qui est en retard de $+\pi/3$ par rapport à $u_e(t) = u_0\ \cos(\omega t)$.
- (chapitre à venir : $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$ est aussi l'argument de la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{u_{0s}}{u_{0e}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_s-\varphi_e)}$.)

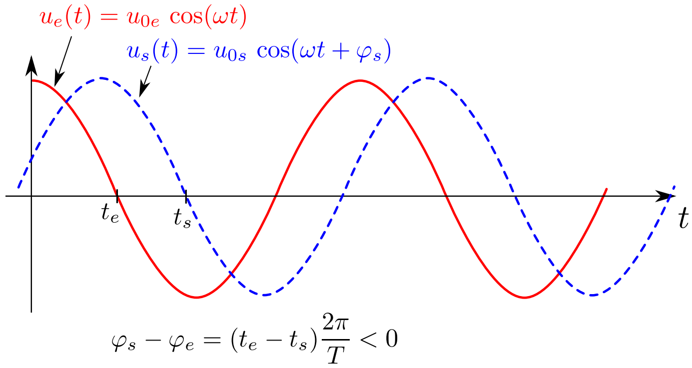
Démonstration de la méthode :
Repérons les maximum :
$u_e = u_0\cos(\omega t+\varphi_e)$ est maximal en $\omega t + \varphi_e = 0$, donc en $t_e = -\varphi_e/\omega$.
$u_s = u_0\cos(\omega t+\varphi_s)$ est maximal lorsque $\omega t + \varphi_s = 0$, donc en $t_s = -\varphi_s/\omega$.

On a donc $t_e - t_s = -\varphi_e/\omega + \varphi_s/\omega = -(\varphi_e - \varphi_s)/\omega$.

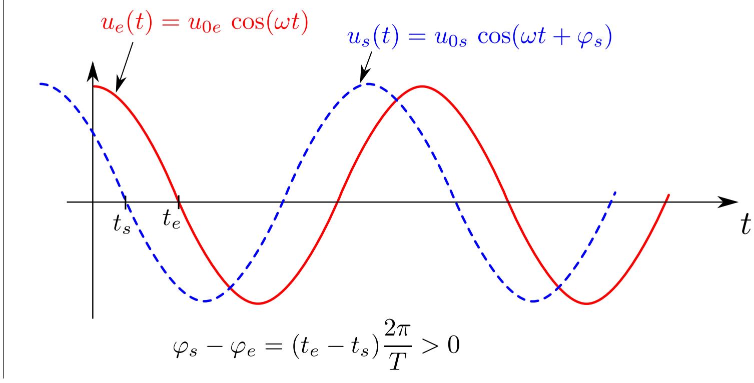
On a donc bien $\varphi_s - \varphi_e = \omega(t_e - t_s)$.

Quelques exemples particuliers :

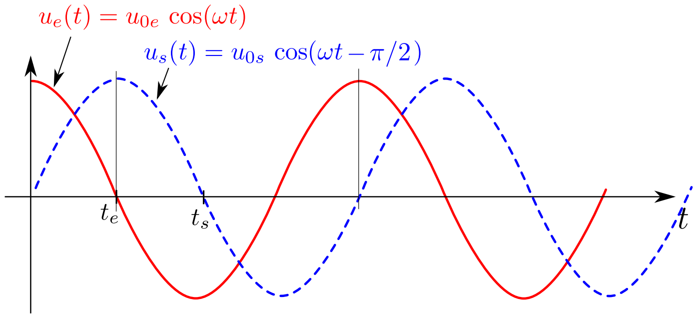
u_s en retard sur u_e



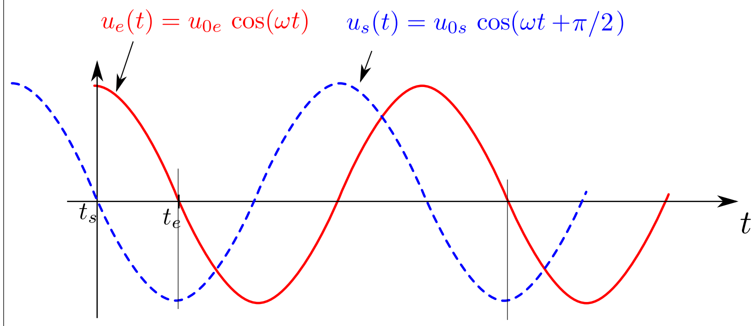
u_s en avance sur u_e



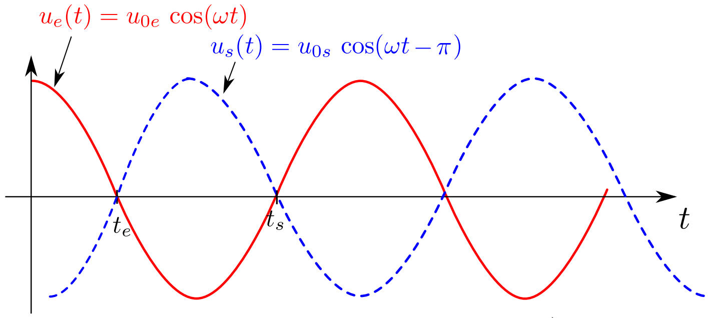
u_s en retard sur u_e
u_s et u_e en quadrature



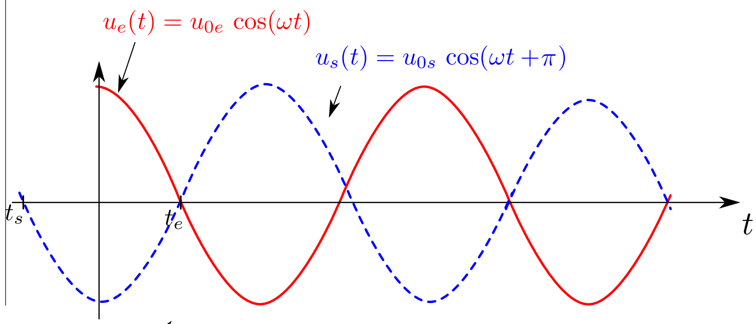
u_s en avance sur u_e
u_s et u_e en quadrature



u_s en retard sur u_e
u_s et u_e en opposition de phase



u_s en avance sur u_e
u_s et u_e en opposition de phase



(ces deux cas sont en fait identiques)

III – Spectre

1 – Décomposition d'un signal

a/ Cas d'un signal périodique

Propriétés

Décomposition de Fourier : Soit $s(t)$ un signal périodique de période T, et soit $f_0 = 1/T$ sa fréquence et $\omega_0 = 2\pi f_0$ sa pulsation.
$s(t)$ se décompose comme somme de signaux harmoniques de fréquences multiples entières de f_0 :

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

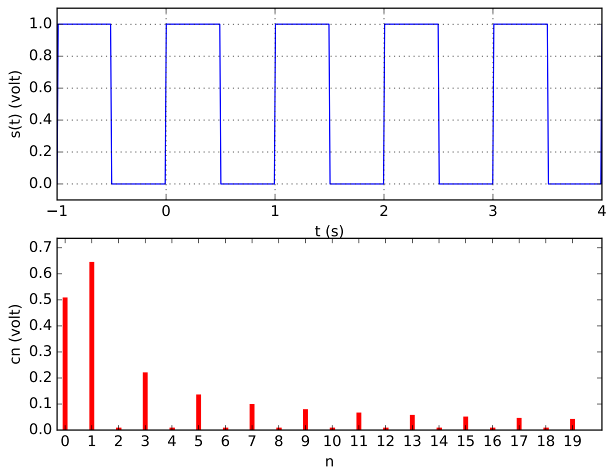
- c_0 est la **valeur moyenne** du signal, ou encore sa **composante continue** (de fréquence nulle).
- Le n-ième terme = l'**harmonique** de rang n. Pulsation $n\omega_0$ (multiple entier de ω_0), fréquence $n \times f_0$.
- L'harmonique $n = 1$ est de même fréquence que le signal $s(t)$, il s'agit du **fondamental**. ω_0 est aussi appelée pulsation fondamentale.

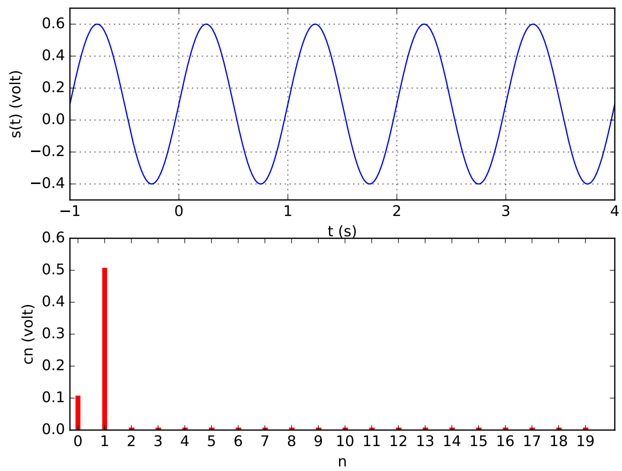
Définition

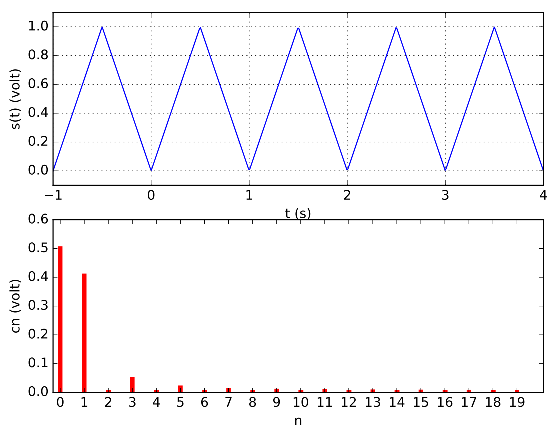
Le tracé de l'amplitude c_n de chaque composante en fonction de sa fréquence (ou de sa pulsation, ou de n) est le spectre du signal.

(On peut parfois, en plus, tracer les phases φ_n en fonction de n.)

Exemples :







Remarque : Il existe des formules dans des cas simples.

Par exemple pour le signal créneau ci-dessus, on a $c_n = \dfrac{2}{\pi n}$ si n impair et $c_n = 0$ si $n > 0$ pair. Pour le signal triangle, on a $c_n = \dfrac{4}{\pi^2 n^2}$ si n impair et $c_n = 0$ si $n > 0$ pair.

b/ Cas d'un signal quelconque

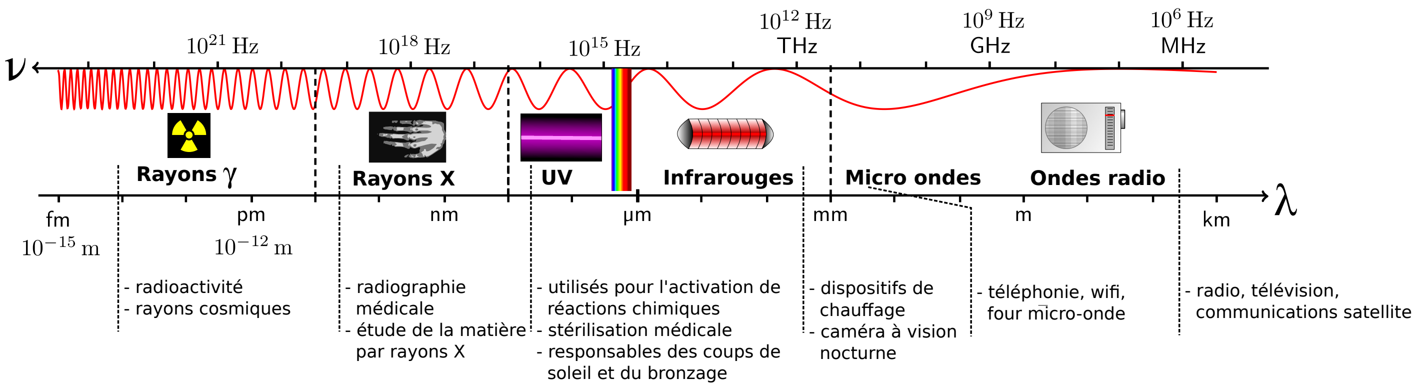
Dans le cas d'un signal non périodique, une décomposition similaire existe. Cette fois le signal se décompose comme une somme continue de signaux harmoniques de toutes les fréquences (et non plus de multiples entiers de $f = 1/T$ seulement). On peut donc toujours tracer son spectre.

2 – Exemples

Voir **EC4**.

3 – Ordres de grandeur

a/ Signaux électromagnétiques

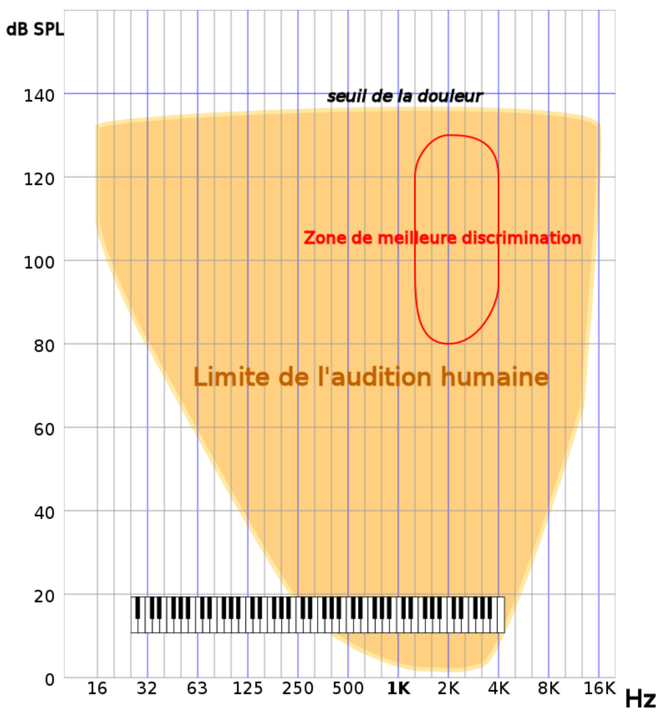


(source : Wikipedia)

On retiendra les points suivants :

- Fréquence du réseau électrique français : 50 Hz.
- Fréquence radio FM : quelques 100 MHz.
- Fréquence téléphonie mobile, wifi, four à micro-onde : 1 à 10 GHz.
- Spectre de la lumière visible : $\sim 10^{15}$ Hz.

b/ Signaux acoustiques



On retiendra que le spectre audible se situe <u>entre 20 Hz et 20 kHz</u>.

(source : Wikipedia)