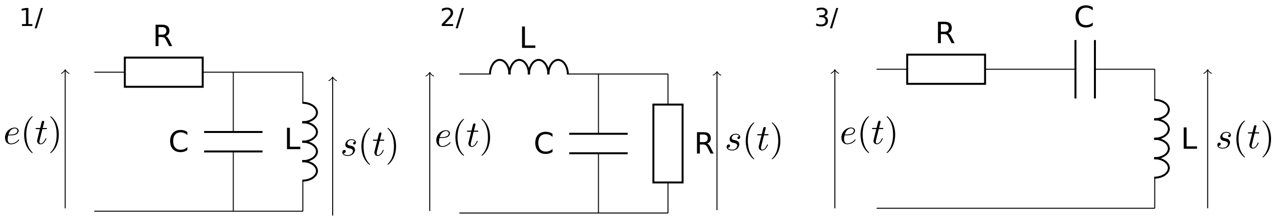
Étude des systèmes linéaires

TD – Filtres

I Exemples de filtres [● ○ ○]



1 - On considère le circuit 1 ci-dessus.

a- Réaliser une étude asymptotique pour en déduire le type de filtre.

b- Donner l'expression de la fonction de transfert.

c- Mettre la fonction de transfert sous forme canonique, en choisissant parmi une des formes suivantes :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \qquad \underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \qquad \underline{H} = \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{1 + \frac{\mathrm{j}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

On donnera les expressions de Q et ω_0 en fonction de R, L et C.

d- Tracer l'allure asymptotique du diagramme de Bode (avec en abscisse la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$).

2 - Recommencez, mais pour le circuit 2.

3 - Idem, circuit 3.

Les plus rapides pourront donner les expressions du gain en décibel et de l'argument de $\underline{H}$ (et tracer l'allure correspondante).

II Gabarit d'un filtre [● ● ○]

On veut réaliser un filtre pour éliminer le bruit dû au secteur, de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$, d'un signal dont les fréquences utiles sont supérieures à $100\,\text{Hz}$. On se donne alors le cahier des charges suivant :

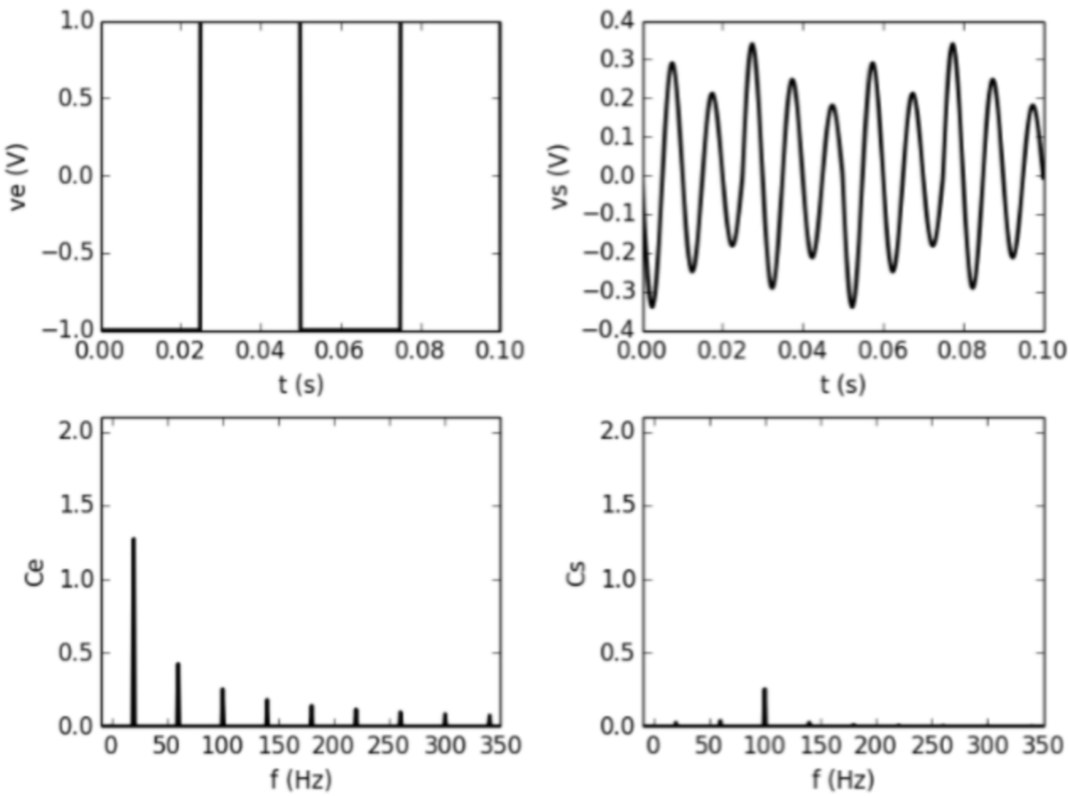
- l'amplitude des signaux sinusoïdaux de fréquence inférieure ou égale à $f_a = 50\,\text{Hz}$ est divisée par au moins $\sqrt{10}$.
- l'amplitude des signaux sinusoïdaux de fréquence supérieure à $f_p = 100\,\text{Hz}$ est divisée par au plus $\sqrt{2}$.

1 - Traduire graphiquement ces exigences dans le plan de Bode $(G_{\text{dB}},\ \log(f))$. Quel type de filtre peut convenir ?

2 - Montrer qu'un filtre d'ordre un ne peut pas convenir.

III Filtrage d'un signal créneau [● ○ ○]

On dispose d'un filtre inconnu. On applique en entrée un signal créneau, dont on donne le spectre. En sortie du filtre, on obtient un signal, dont on donne également le spectre. Quelle est la nature du filtre et quelles sont ses caractéristiques (fréquence centrale, largeur de bande passante) ?



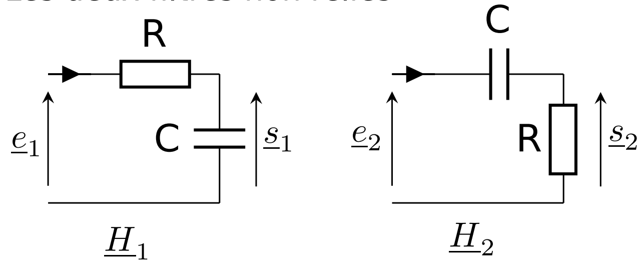
IV Association de filtres [● ● ○]

On souhaite associer un filtre RC (passe-bas) et un flitre CR (passe haut) en cascade afin de réaliser un filtre passe-bande.

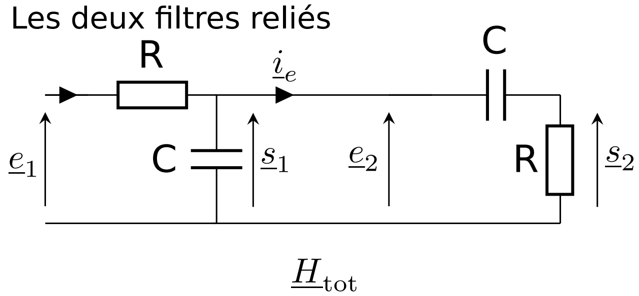
L'idée est que le premier filtre coupe les hautes fréquences, le second les basses fréquences, et donc l'ensemble forme un passe bande. C'est bien correct, mais nous allons chercher à savoir ce que vaut précisément la fonction de transfert de cet assemblage.

Notons $\underline{H}_1 = \underline{s}_1/\underline{e}_1$ et $\underline{H}_2 = \underline{s}_2/\underline{e}_2$ les fonctions de transfert des filtres 1 et 2 lorsqu'ils sont en "sortie ouverte", c'est-à-dire lorsque rien n'est connecté sur leur sortie (comme sur les schémas du haut ci-contre).

Les deux filtres non reliés



Les deux filtres reliés



1 - Exprimer les fonctions de transfert $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$.

2 - Montrer que le produit $\underline{H}_1 \times \underline{H}_2$ se met sous la forme $\dfrac{\mathrm{j}\omega/\omega_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\mathrm{j}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$, avec ω_0 et Q dont on précisera les expressions.

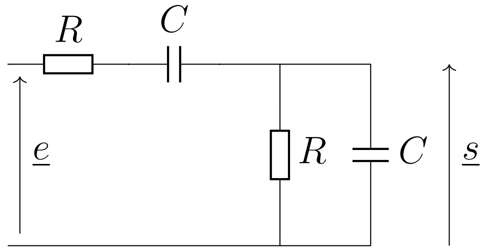
3 - On étudie ensuite le filtre obtenu en reliant les deux filtres précédents (circuit du bas ci-dessus). Montrer que sa fonction de transfert s'écrit $\underline{H}_{\text{tot}} = \dfrac{\mathrm{j}\omega/\omega_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\mathrm{j}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$, avec ω_0 et Q dont on précisera les expressions.

4 - À-t-on $\underline{H}_{\text{tot}} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$?

Cette différence provient du fait que le courant i_e n'est pas nul : ainsi, on ne peut pas utiliser le diviseur de tension qui donnerait $\underline{H}_1 = \dfrac{\underline{s}_1}{\underline{e}_1} = \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}$.
Nous verrons en TP qu'il y a un moyen de garantir que i_e est nul : intercaler un montage "suiveur" entre les deux filtres.

V Filtre à pont de Wien [● ○ ○]

On considère le filtre à pont de Wien ci-contre.



1 - Par une étude asymptotique, donner la nature du filtre.

À quel condition sur la pulsation d'entrée les condensateurs vont-ils effectivement se comporter comme des interrupteurs ouverts ? Et comme des interrupteurs fermés ?

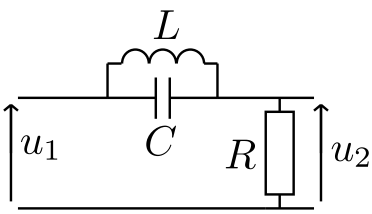
2 - Montrer que la fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$, avec ω_0, H_0 et Q dont on donnera les expressions.

3 - Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude (avec en abscisse la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$) (il est identique au cas du circuit 1/ de l'exercice I : ne pas refaire l'étude, tracer juste l'allure).

Schématiser les pulsations de coupure et la bande passante sur votre graphique.

4 - Dans quelle gamme de fréquence ce filtre peut-il être utilisé comme dérivateur ? Comme intégrateur ?

VI Étude d'un bloc filtre [● ● ○]



Le filtre ci-contre réalise la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \underline{u}_2/\underline{u}_1$, avec

$$\underline{H} = \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + \dfrac{1}{Q\omega_0}\mathrm{j}\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \qquad (1)$$

1 - **a.** Que vaut (ou vers quoi tend) la fonction de transfert pour $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$, et $\omega = +\infty$?

b. En déduire la valeur prise par le gain G en décibel en $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$, et $\omega = +\infty$.

c. En déduire l'allure du diagramme de Bode en amplitude, et donner la nature de ce filtre.

2 - Redémontrer l'expression 1 pour $\underline{H}$, en précisant l'expression de ω_0 et de Q en fonction de R, C et L.