Mécanique
Chapitre 1, suite

Le système masse-ressort

Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

- ▶$_1$ Comment s'écrit la force exercée par un ressort sur un objet accroché à une de ses extrémités ? On fera un schéma.
- ▶$_2$ Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?
- ▶$_3$ Et celle de l'énergie potentielle associée au ressort ?
- ▶$_4$ Quelle est l'expression de l'énergie cinétique d'une masse m ?
- ▶$_5$ Quelle est l'expression de l'énergie mécanique ? Quelle propriété possède-t-elle si toutes les forces qui travaillent sont conservatives ?

Ce qu'il faut savoir faire

- ▶$_6$ Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort, éventuellement avec un amortissement.
- ▶$_7$ Sans amortissement : résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données.
- ▶$_8$ Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort.
- ▶$_9$ Avec amortissement : étudier le régime transitoire. Savoir écrire l'équation sous la forme canonique (avec ω_0 et Q), distinguer les trois régimes possibles, résoudre l'équation.
- ▶$_{10}$ Avec ou sans amortissement, savoir étudier le système masse-ressort en régime sinusoïdal forcé.

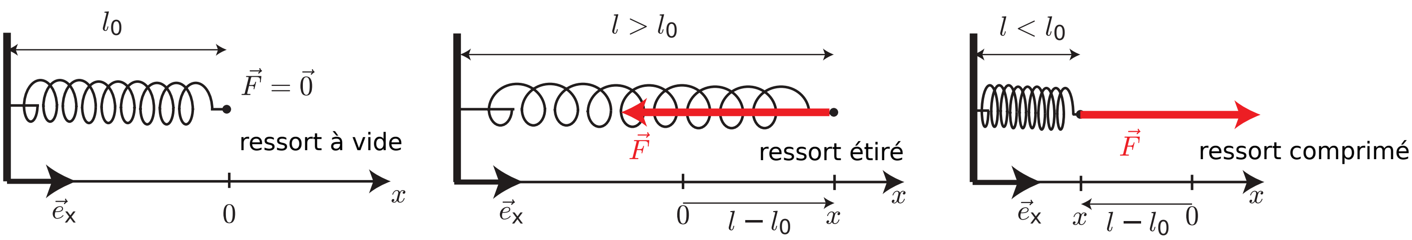
I – Le système masse-ressort sans amortissement : oscillateur harmonique

1 – Description d'un ressort

Modèle simplifié du ressort à spires (non jointives), de masse négligeable. Notations :

- Longueur à vide : l_0. – Longueur totale : l.
- L'allongement du ressort est par définition : $\Delta l = l - l_0$.

Action du ressort :



- Si $l = l_0$, pas de force.
- Si $l > l_0$, ressort étiré, force qui rappelle M vers le point d'attache.
- Si $l < l_0$, ressort comprimé, force qui pousse M.

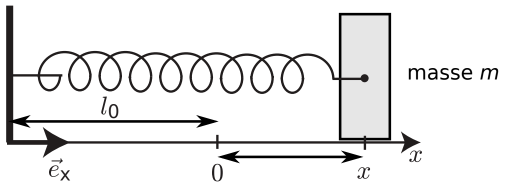
Force exercée par un ressort

La force exercée sur un point M accroché à l'extrémité est proportionnelle à l'allongement $\Delta l = l - l_0$ du ressort :

$$\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\,\vec{u}_{\text{ext}},}$$

avec $\vec{u}_{\text{ext}}$ le vecteur unitaire dirigé du point d'attache vers la masse M.

Exercice 1 – système masse-ressort sans frottements



On considère le système ci-contre. On néglige tout frottement et on se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le PFD, en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$. L'écrire sous forme canonique.

On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

2 - Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera les constantes d'intégration.

3 - Alternative : reprendre cette question en supposant cette fois que à $t = 0$, $x(0) = x_0 > 0$ et $v(0) = 0$.

2 – Étude énergétique

Notions sur l'énergie en mécanique

Énergie mécanique d'un système :

$$E_m = \underbrace{E_c}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{E_p}_{\text{énergie potentielle}} .$$

Théorème : en l'absence de frottement, l'énergie mécanique est constante, $E_m = \text{cst}$.

$$\text{On a alors } \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Expressions des énergies

- Énergie cinétique : $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$
- Énergie potentielle : une par force, $E_p = E_{p,\text{pes}} + E_{p\text{ressort}}$,
- $E_{p,\text{pes}} = \pm mgz$ énergie potentielle de pesanteur.
  Signe + si l'axe z est vers le haut, signe − si l'axe z est vers le bas.
- $\boxed{E_{p\text{ressort}} = \dfrac{1}{2}k(l - l_0)^2}$ énergie potentielle élastique du ressort.

Remarque : $x(t)$ est une fonction du temps. On a alors : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\,x^2}{\mathrm{d}t} = 2\,x\,\dot{x},}$ et aussi $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\,\dot{x}^2}{\mathrm{d}t} = 2\,\dot{x}\,\ddot{x}.}$

Exercice 2 – Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort

On reprend le cas étudié précédemment et ses résultats : le PFD a donné $m\ddot{x} = -kx$, dont la solution est $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

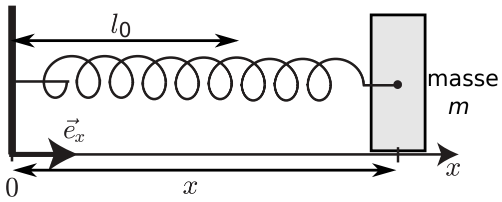
1 - Donner l'expression de l'énergie mécanique du système {masse et ressort} en fonction de $x(t)$, de $\dot{x}(t)$ et d'autres paramètres.

2 - Dériver par rapport au temps cette expression et montrer que l'énergie mécanique est bien conservée.

3 - Qu'est ce qui permettait de prédire cette conservation sans faire aucun calcul ?

3 – Un autre exemple de repérage

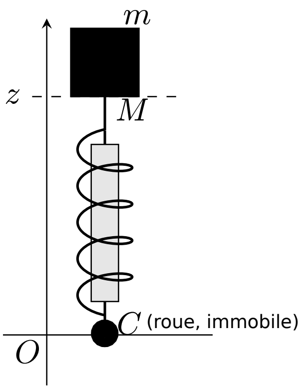
On change la façon de repérer la position de la masse. → Établir l'équation différentielle portant sur $x(t)$.



II – Le système masse-ressort avec amortissement : étude du régime transitoire

Dans la partie précédente, les frottements sont négligés. En conséquence, la masse oscille indéfiniment. Ce n'est pas le cas en pratique : elle finit par s'immobiliser, à cause de l'existence de frottements.
Cette fois, nous prenons en compte les frottements.

Exercice 3 – Exemple : étude d'une suspension de VTT, régime transitoire



On considère la suspension avant d'un VTT, que l'on modélise comme l'association d'un ressort de raideur k et longueur à vide l_0, en parallèle avec un amortisseur de constante de frottement α. La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

Le mouvement vertical du vttiste (le point M de masse m) est repéré par la côte $z(t)$.

La force exercée par l'amortisseur sur le point M s'écrit $\vec{F} = -\alpha \dot{z}(t)\, \vec{e}_z$.

Pour l'instant, le vttiste n'avance pas.

1 - Faire un bilan des forces sur le vttiste.

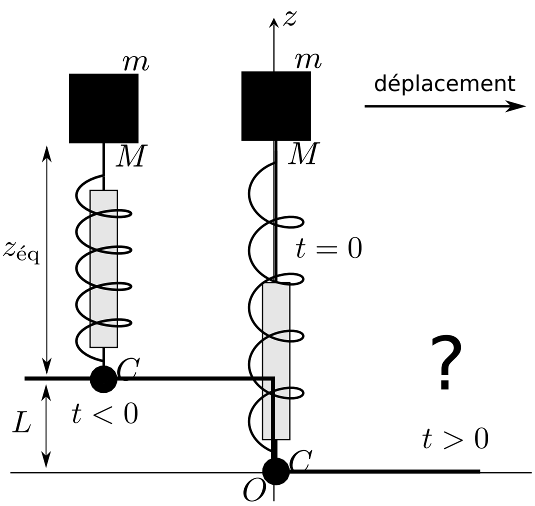
2 - On note $z_{\text{éq}}$ l'altitude du point M lorsqu'il est à l'équilibre (vttiste immobile au repos). Établir l'expression de $z_{\text{éq}}$.

3 - Établir l'équation différentielle suivie par $z(t)$.

L'écrire sous la forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2\, z_{\text{éq}}.$$

On précisera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de k, α, m, l_0 et g. Quelles sont leurs unités ?



4 - Le vttiste descend une marche de hauteur L à l'instant $t = 0$. Ainsi, pour $t > 0$, $z(t)$ est la solution de l'équation ci-dessus, avec la condition initiale $z(0) = z_{\text{éq}} + L$ et $\dot{z}(0) = 0$.

Rappeler les noms des trois régimes possibles pour la solution $z(t)$ et indiquer les valeurs de Q associées. Pour chaque cas, tracer l'allure de $z(t)$.

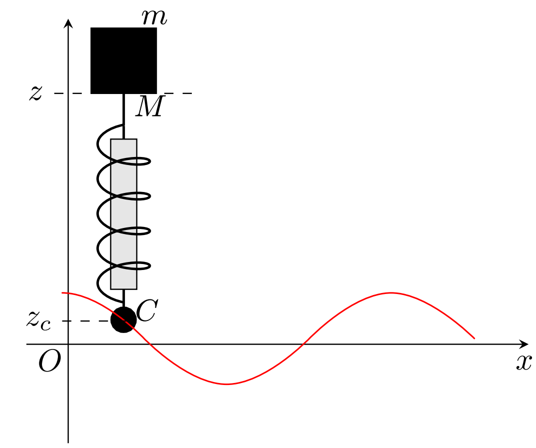
Dans quel cas la durée du régime transitoire est-elle la plus courte ? Dans quel cas est-il préférable de se placer pour le confort du vttiste ?

5 - On suppose que $Q = 1/2$. Établir alors l'expression de la solution $z(t)$.

III – Le système masse-ressort avec amortissement : étude du régime sinusoïdal forcé

Les outils vus en électronique pour le régime sinusoïdal forcé, ou pour le filtrage (notation complexe, fonction de transfert...) s'appliquent de la même façon exactement en mécanique.

Exercice 4 – Exemple : étude d'une suspension de VTT en régime sinusoïdal forcé



On reprend la situation décrite dans l'exercice précédent. Cette fois, le vttiste se déplace et on note $x(t)$ son abscisse. Sa vitesse horizontale est $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ avec v_0 constante.

Le profil du chemin (bosses et creux, cailloux...), impose à la roue (réduite à un point C pour simplifier) de suivre une côte

$$z_C = C_m \cos\left(\frac{2\pi x(t)}{\lambda}\right).$$

La force exercée par l'amortisseur s'écrit $\vec{F} = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_C)\vec{e}_z$.

1 - Donner l'expression de $x(t)$ en supposant que C se trouve à l'abscisse $x = 0$ à l'instant initial.
En déduire l'expression de la pulsation ω du forçage du système en fonction de λ et de v.
On conservera la notation ω dans ce qui suit.

2 - Faire un bilan des forces s'exerçant sur la masse, et exprimer chaque force en fonction de $\vec{e}_z$ et des paramètres du problème (dont $z(t)$ et sa dérivée, $z_C(t)$ et sa dérivée, k, l_0, α).

3 - Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$.

4 - On pose $z_{\text{éq}} = l_0 - \dfrac{mg}{k}$, et $u(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$. À partir de l'équation sur $z(t)$ établie précédemment, en déduire l'équation suivie par $u(t)$. La mettre sous la forme $\ddot{u} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z_C} + \omega_0^2 z_C$. On donnera les expressions de Q et ω_0.

On utilise les notations complexes en régime sinusoïdal forcé.

- $z_C(t) = C_m \cos\omega t$ est associé au signal complexe $\underline{z}_C(t) = C_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.
- $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est associé au signal complexe $\underline{u}(t) = \underline{U}_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.

5 - Quelle est l'expression de $\underline{U}_m$ en fonction de φ et de U_m ?

6 - Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}_m$ en fonction de ω_0, Q, ω et C_m. Montrer ensuite que l'amplitude U_m des oscillations verticales du vttiste est donnée par la relation

$$U_m = \frac{\sqrt{1 + x^2/Q^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}\, C_m$$

avec $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite.

7 - Le graphique ci-dessous montre l'évolution du rapport U_m/C_m en fonction de x pour plusieurs valeurs de Q. Quelles sont alors les solutions pour réussir à descendre la piste sans trop de peine ?