Fiche méthode
Maths

Correction – Entraînement au calcul

I Trigonométrie

1 - $\cos(\omega t - kx + \pi/2) = -\sin(\omega t - kx)$.

2 - $\cos(\omega t - kx + \pi) = -\cos(\omega t - kx)$.

3 - $\sin(\omega t - kx) = \cos(\pi/2 - [\omega t - kx]) = \cos(\omega t - kx - \pi/2)$.

II Calculs de dérivées

III Primitives et intégrales

Primitives

4 - $f(t) = \cos(\omega t)$

– Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \dfrac{\omega \cos(\omega t)}{\omega} = \cos(\omega t) = f(t)$, c'est correct.

5 - $f(t) = \sin(\omega t)$

– Primitive : $F(t) = -\dfrac{\cos(\omega t)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = -\dfrac{-\omega \sin(\omega t)}{\omega} = \sin(\omega t) = f(t)$, c'est correct.

6 - $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

– Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t + \varphi)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \dfrac{\omega \cos(\omega t + \varphi)}{\omega} = \cos(\omega t + \varphi) = f(t)$, c'est correct.

7 - $f(t) = \cos(4\omega t + \varphi)$

– Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t + \varphi)}{4\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \dfrac{4\omega \cos(4\omega t + \varphi)}{4\omega} = \cos(4\omega t + \varphi) = f(t)$, c'est correct.

8 - $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1$

– Primitive : $F(t) = 2\dfrac{t^4}{4} + 6\dfrac{t^3}{3} + 7\dfrac{t^2}{2} + t = \dfrac{t^4}{2} + 2t^3 + \dfrac{7t^2}{2} + t$.

– Vérification : $F'(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1 = f(t)$, c'est correct.

Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes, qui correspondent au calcul de la valeur moyenne ou quadratique de certains signaux. À chaque fois, $T = 2\pi/\omega$.

9 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

Période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}s_0\int_0^T \cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\
&= \frac{s_0}{T}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)\right]_0^T\\
&= \frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(\omega T+\varphi)-\sin(\varphi)\right)\\
&= \frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(2\pi+\varphi)-\sin(\varphi)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

10 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

Période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T s_0\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t &= \frac{s_0}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\
&= \frac{s_0}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)\right]_0^T\\
&= -\frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\cos(\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+\varphi)-\cos(\varphi)\right)\\
&= -\frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\underbrace{\cos(2\pi+\varphi)}_{=\cos\varphi}-\cos(\varphi)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

11 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

Pour obtenir la période il faut se débarrasser du carré en utilisant la formule

$$\cos(2x)=2\cos^2 x-1,\quad \text{soit donc}\quad \cos^2 x=\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0^2\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2}+s_0^2\frac{1}{2},\\
&= \frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{s_0^2}{2},
\end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi}{\omega}$.

Calculons ensuite l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{s_0^2}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{s_0^2}{2}\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{1}{T}\frac{s_0^2}{2}\int_0^T\cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\frac{s_0^2}{2}\int_0^T\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{s_0^2}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin[2\omega t+2\varphi]\right]_0^T+\frac{s_0^2}{2T}(T-0) \\
&\qquad = \frac{s_0^2}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\sin[2\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+2\varphi]-\sin(2\varphi)\right)+\frac{s_0^2T}{2T} \\
&\qquad = \frac{s_0^2}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\underbrace{\sin[2\times2\pi+2\varphi]}_{=\sin(2\varphi)}-\sin(2\varphi)\right)+\frac{s_0^2}{2} \\
&\qquad = \frac{s_0^2}{2}
\end{aligned}
$$

12 - $\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$.

On utilise cette fois :

$$\cos(2x)=1-2\sin^2 x,\quad \text{soit donc}\quad \sin^2 x=-\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
s(t)&=-s_0^2\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2}+s_0^2\frac{1}{2}, \\
&=-\frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{s_0^2}{2},
\end{aligned}
$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$.

Pour la valeur moyenne on reprend presque exactement les calculs du cas précédent, à un signe moins près mais sans importante car en facteur du terme nul. On a donc encore le résultat $\frac{s_0^2}{2}$.

IV Puissances

13 - $\frac{10^3\times10^{-10}}{(10^{-2})^3}=10^{3-10+6}=10^{-1}$

14 - $\frac{(10^4)^2\times10^{-34}}{(10^{-1})^2\times(10^{0,5})^2}=10^{8-34+2-1}=10^{-25}$

15 - $\frac{\sqrt{10^3\times10^5}}{(10^8)^{1/4}}=10^{8/2-8/4}=10^2$

16 - x^{-3a}

17 - x^{2-4a}

18 - $x^{\frac{3}{2}}$