Devoir Surveillé

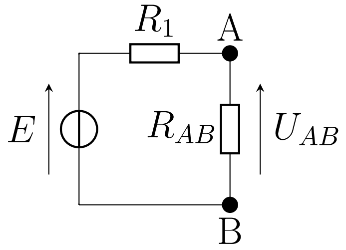
Correction – Physique-chimie – DS 3

I Double diviseur de tension

1 - R_2 et R_4 sont en série, donc équivalente à une résistance $R' = R_2 + R_4 = 30\,\Omega$.

R' et R_3 sont en parallèle, donc équivalentes à une résistance $\boxed{R_{AB} = \dfrac{R'R_3}{R'+R_3} = 12\,\Omega.}$

Schéma équivalent (question 1) :

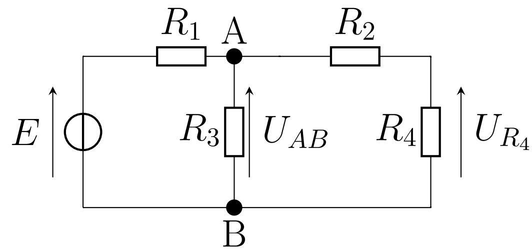


2 - $\star$ On raisonne d'abord sur le schéma équivalent où il y a R_{AB}, afin de déterminer la valeur de U_{AB}.

Un diviseur de tension donne

$$U_{AB} = E\,\frac{R_{AB}}{R_{AB}+R_1} = \frac{E}{2}.$$

Retour au schéma de départ :

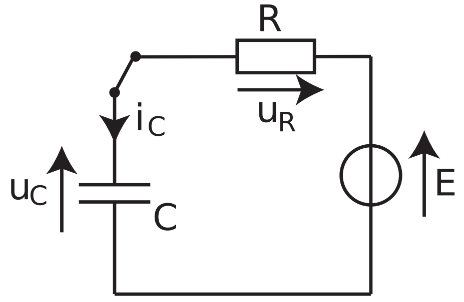


$\star$ On retourne au schéma de départ. On connait U_{AB}. Un diviseur de tension permet d'obtenir U_{R_4} :

$$U_{R_4} = U_{AB}\,\frac{R_4}{R_4+R_2} = \frac{E}{2}\,\frac{2}{3}, \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{R_4} = \frac{E}{3} = 2{,}0\,\text{V}.}$$

II Stratégies de charge d'un condensateur

3 - On reproduit la partie intéressante du circuit :



– Loi des mailles : $u_c + u_R = E$.

– Or $u_R = Ri_c$, et $i_c = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, donc $u_R = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

– On a donc $u_c + RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E$.

– On divise par RC, on pose $\boxed{\tau = RC,}$ et on a donc l'équation : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}.}$

4 - Avant fermeture de l'interrupteur le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$.

Or la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps (argument important), donc $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0.}$

5 - $\star$ Solution de l'équation homogène + solution particulière, c'est-à-dire

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_p.$$

On obtient la solution particulière en l'injectant dans l'équation et en la supposant constante :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \quad \text{donc} \quad u_p = \tau\frac{E}{\tau} = E.$$

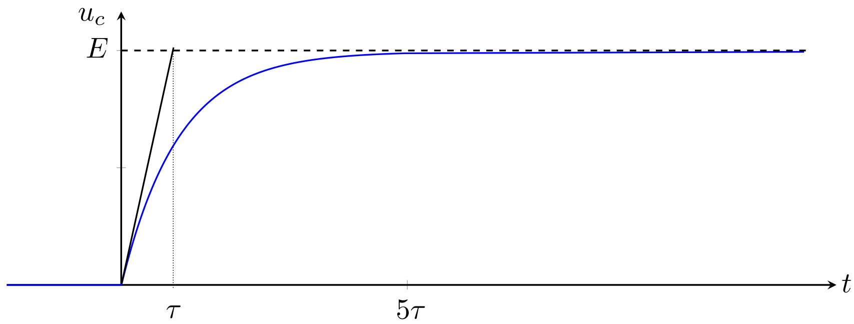
On a donc :

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E.$$

$\star$ On détermine A avec les conditions initiales : $u_c(0^+) = 0$ et $u_c(0^+) = A + E$, donc $A = -E$.

$\star$ Conclusion : $u_c(t) = -E\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$, soit $\boxed{u_c(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}).}$

6 - Allure de la solution :



7 - Expression pour l'énergie stockée par un condensateur : $\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \dfrac{1}{2}Cu_c^2(t)$.

À la fin $u_c = E$, donc l'énergie stockée est $\boxed{\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \dfrac{1}{2}CE^2.}$

8 - Le courant i_c traverse le condensateur, donc $i_c = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$. Il faut dériver l'expression précédente de u_c :

$$i_c(t) = C \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})\right) = -CE\,\frac{-1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Or $\tau = RC$, donc : $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$

9 - Puissance instantanée fournie par le générateur : $\mathcal{P} = u_{\text{générateur}} \times i_{\text{générateur}} = E \times i_c$.

Pour obtenir l'énergie il faut intégrer la puissance :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{fournie}} &= \int_0^{+\infty} E \times i_c(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} E\times\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{E^2}{R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

(suite du calcul)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{fournie}} &= \frac{E^2}{R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{E^2}{R}(-\tau)(0-1)\\ &= \frac{E^2}{R}RC\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = CE^2.}$$

10 - On a $\eta = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \dfrac{CE^2/2}{CE^2}$, donc $\boxed{\eta = \dfrac{1}{2}.}$

Le rendement est de 50%, la moitié de l'énergie fournie est inutilement dissipée par effet Joule dans la résistance. Notons que ceci ne dépend pas de la valeur de R, donc réduire R ne change rien.

Second procédé de charge

11 - Même chose que dans la partie précédente, sauf qu'il faut remplacer E par $E/2$.

On a donc $\boxed{u_c(t) = \dfrac{E}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$

12 - On sait que les 99% de la valeur finale sont atteint au bout de $\boxed{t_1 = 5\tau.}$

Si on ne s'en souvient pas, il faut le démontrer : on résout $u_c(t_1) = 0{,}99E/2$, ce qui s'écrit :

$$1-\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}99 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}01 \;\Leftrightarrow\; -t_1/\tau = \ln(0{,}01) \;\Leftrightarrow\; t_1 = \tau\times\ln(1/0{,}01) = 4{,}6\tau.$$

13 - $\star$ La deuxième phase de charge est une charge par un générateur de tension E. Une loi des mailles montre que la tension $u_c(t)$ obéit à l'équation (idem que lors de la méthode 1) :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau},\quad \tau = RC.$$

$\star$ Solution de l'équation homogène + solution particulière, c'est-à-dire

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_p.$$

On obtient la solution particulière en l'injectant dans l'équation et en la supposant constante :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau},\quad \text{donc}\quad u_p = \tau\frac{E}{\tau} = E.$$

On a donc :

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E.$$

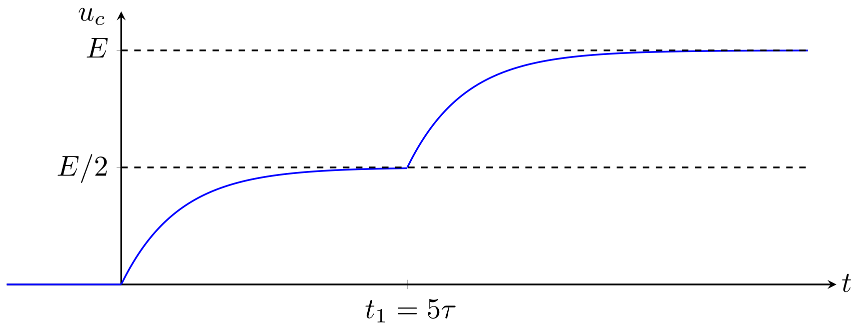
$\star$ On détermine A avec les conditions initiales : $u_c(t_1) = \dfrac{E}{2}$ (par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur).

Or $u_c(t_1) = A\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + E$.

Donc $A\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + E = \dfrac{E}{2}$ donc $A\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = -\dfrac{E}{2}$, donc $\boxed{A = -\dfrac{E}{2}\,\mathrm{e}^{t_1/\tau}.}$

$\star$ Conclusion : $u_c(t) = -\dfrac{E}{2}\mathrm{e}^{t_1/\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$, soit $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right).}$

14 - Allure de la solution :



15 - On a $i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$. On passe le détail des calculs.

$\star$ Pour $t < t_1$: $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{2R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$ $\star$ Pour $t > t_1$: $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{2R}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}.}$

On remarque que i_c n'est pas continue en t_1. Ceci se voyait sur le graphique de $u_c(t)$: il y a rupture de pente.

16 - Calcul similaire à la partie précédente, sauf qu'il faut distinguer les deux phases.

$\star$ Première phase :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{fournie},1} &= \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \times i_c(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \times \frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{4R}\int_0^{t_1} \mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{4R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{t_1} \\
&= \frac{E^2}{4R}(-\tau)(\underbrace{\mathrm{e}^{-t_1/\tau}}_{=\mathrm{e}^{-5}\ll 1} - 1) \\
&= \frac{E^2}{4R}RC
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie},1} = \frac{CE^2}{4}.}$$

$\star$ Deuxième phase :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{fournie},2} &= \int_{t_1}^{+\infty} E \times i_c(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{+\infty} E \times \frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{2R}\int_{t_1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{2R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right]_{t_1}^{+\infty} \\
&= \frac{E^2}{2R}(-\tau)(0 - 1) \\
&= \frac{E^2}{2R}RC
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie},2} = \frac{CE^2}{2}.}$$

⋆ Bilan : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \dfrac{CE^2}{4} + \dfrac{CE^2}{2} = \dfrac{3}{4}CE^2.}$

17 - Quant à l'énergie stockée par le condensateur, elle vaut encore

$$\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2}Cu_c^2(t=+\infty) = \frac{1}{2}CE^2.$$

Le rendement est donc $\eta = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \dfrac{CE^2/2}{(3/4)CE^2}$, donc $\boxed{\eta = \dfrac{2}{3} = 66\%.}$

Le rendement est de 66%, ce qui est mieux qu'avec la méthode 1.

Le désavantage est que le chargement est deux fois plus long : il faut attendre deux fois 5τ.

Remarque : On peut envisager un chargement avec une efficacité de 100% si on multiplie les étapes : on charge le condensateur avec un générateur de tension E/N, puis $2E/N$, puis $3E/N$, etc... donc en N étapes, avec N très grand. Il faut alors un temps très grand également... Ceci est à rapprocher de la réversibilité que nous verrons en thermodynamique.

(Si on procède en N étapes, on peut montrer que $\eta = N/(N+1)$.)

III Système à deux ressorts

18 - Ressort de droite : $\vec{F}_1 = -k(l_1 - l_0)\vec{u}_{\text{ext1}}$, avec $l_1 = l_{\text{éq}} + x$ et $\vec{u}_{\text{ext1}} = \vec{e}_x$, donc $\boxed{\vec{F}_1 = -k(x + l_{\text{éq}} - l_0)\vec{e}_x.}$

Ressort de gauche : $\vec{F}_2 = -k(l_2 - l_0)\vec{u}_{\text{ext2}}$, avec $l_2 = l_{\text{éq}} - x$ et $\vec{u}_{\text{ext2}} = -\vec{e}_x$, donc $\boxed{\vec{F}_2 = k(-x + l_{\text{éq}} - l_0)\vec{e}_x.}$

19 - On choisit un axe y vers le haut.

⋆ Bilan des forces sur la masse :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$.
- Réaction de la tige qui maintient la masse : $\vec{R} = R\vec{e}_y$.
- Forces des deux ressorts : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k(x + l_{\text{éq}} - l_0)\vec{e}_x + k(-x + l_{\text{éq}} - l_0)\vec{e}_x = -2kx\vec{e}_x$.

On a aussi l'accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$ (mouvement astreint à l'axe Ox).

⋆ Principe fondamental de la dynamique, dans un référentiel galiléen, à la masse :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \quad \text{donc} \quad m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_y + R\vec{e}_y - 2kx\vec{e}_x.$$

On projette sur $\vec{e}_x$: il reste $m\ddot{x} = -2kx$. On a donc $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{2k}{m}x = 0.}$

20 - Un oscillateur harmonique obéit à une équation du type $\ddot{x}+\omega_0^2 x = 0$, ce qui est bien le cas ici, et on identifie $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m},}$ donc $\boxed{T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}.}$

21 - ⋆ Solution particulière nulle, donc la solution générale est : $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).}$

⋆ Condition initiale 1 : $x(0) = x_0$.

D'après la solution : $x(0) = A$. Donc $A = x_0$.

⋆ Condition initiale 2 : $\dot{x}(0) = 0$.

D'après la solution : $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$, donc $\dot{x}(0) = B\omega_0$.

Ceci doit être nul, donc $B = 0$.

⋆ Conclusion : $\boxed{x(t) = x_0\cos\omega_0 t.}$

⋆ Allure : cosinus partant de x_0.

Portrait de phase : ellipse partant de $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$, tournant dans le sens horaire. Vitesse maximale en $\pm\omega_0 x_0$.

22 - ⋆ Pour les ressorts : $E_p = \frac{1}{2}k(l_1-l_0)^2+\frac{1}{2}k(l_2-l_0)^2 = \frac{1}{2}k(l_{\text{éq}}+x-l_0)^2+\frac{1}{2}k(l_{\text{éq}}-x-l_0)^2$.

⋆ Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

⋆ L'énergie potentielle de pesanteur est constante.

⇒ Énergie mécanique : $E_m = E_p + E_c$.

23 - On a négligé tout frottement, donc l'énergie mécanique se conserve. On a donc $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$. Calculons cette dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= k(l_{\text{éq}}+x-l_0)\dot{x} + k(l_{\text{éq}}-x-l_0)(-\dot{x}) + m\dot{x}\ddot{x}\\ &= 2kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x}\end{aligned}$$

Ceci étant nul, on peut simplifier $\dot{x}$, et il reste $m\ddot{x}+2kx = 0$, ce qui est bien l'équation du mouvement trouvée plus haut.

24 - On utilise $2\pi f = \omega_0 = \sqrt{k'/m}$ pour isoler $\boxed{k' = m^2(2\pi f)^2 = 1{,}6\times 10^3\,\mathrm{N/m}.}$

Pour la masse de l'atome de carbone on a utilisé $m = \frac{M_C}{N_A}$.

25 - L'énergie potentielle est $E_p = \frac{1}{2}k'(l-l_0)^2$, soit en prenant $l = 2l_0$: $E_p = \frac{1}{2}k'l_0^2$.

A.N. : $E_p = 1{,}9\times 10^{-17}$ J.

Ceci vaut pour une molécule. Pour avoir l'énergie en J/mol, on multiplie par le nombre de molécules dans une mole, donc $\boxed{E = E_p \times N_A = 11{,}4\,\mathrm{MJ/mol}.}$