TD de révision

I Boucle et moment magnétique

1 - Vecteur normal au circuit (orienté par i) : $+\vec{n}$. Donc

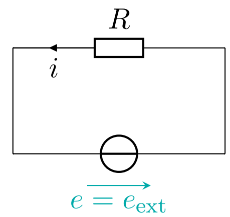
$$\phi_{\text{ext}} = S\,\vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} = S\,B_0 \cos(\omega t)\,.$$

Schéma électrique équivalent ci-dessous à gauche, avec la fem induite :

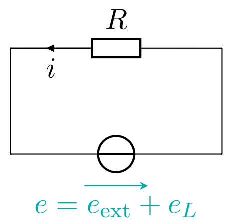
$$e_{\text{ext}} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = +S\,B_0\,\omega \sin(\omega t)\,,$$

d'où on déduit l'intensité induite par le champ extérieur

$$\boxed{i_{\text{ext}} = \frac{e_{\text{ext}}}{R} = \frac{S\,B_0\,\omega}{R} \sin(\omega t)\,.}$$



1 - Sans auto-induction



2 - Avec auto-induction

2 - En tenant compte de l'auto-induction :

$$\phi = \phi_{\text{ext}} + Li \quad \text{donc} \quad \phi = S\,B_0 \cos(\omega t) + Li\,.$$

Schéma électrique équivalent ci-dessus à droite. Cette fois :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = S\,B_0\,\omega \sin(\omega t) - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

D'après la loi des mailles, $e = Ri$, d'où on déduit

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = S\,B_0\,\omega \sin(\omega t)\,.}$$

On passe en complexe car cette fois on ne peut pas en déduire i directement. On a donc :

$$L\mathrm{j}\omega\underline{i} + R\underline{i} = S\,B_0\,\omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \pi/2)}, \quad \text{d'où} \quad \underline{i} = \frac{\omega\,S\,B_0}{R + \mathrm{j}L\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \pi/2)}\,.$$

3 - À partir des raisonnements précédents, on identifie

$$e_{\text{ext}} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} \quad \text{donc} \quad \underline{e}_{\text{ext}} = \omega\,S\,B_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \pi/2)}$$

et de même

$$e_{\text{L}} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{donc} \quad \underline{e}_L = -\mathrm{j}\omega L\,\underline{i} = -\mathrm{j}\omega L\frac{\omega\,S\,B_0}{R + \mathrm{j}L\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \pi/2)}\,.$$

d'où on trouve

$$\underline{H} = \frac{\frac{-\mathrm{j}\omega L\omega\,S\,B_0}{R + \mathrm{j}L\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \pi/2)}}{\omega\,S\,B_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \pi/2)}} = \frac{-\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}L\omega} \quad \text{d'où} \quad \boxed{|\underline{H}| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}\,.}$$

La force électromotrice auto-induite dès lors que $|\underline{H}| \ll 1$, c'est-à-dire lorsque $R/L\omega \gg 1$ soit

$$\boxed{\omega \ll \frac{R}{L}}$$

4 - Considérons par exemple $d \sim 1\,\text{mm}$ et $D \sim 1\,\text{m}$. On trouve alors $L \sim 4 \times 10^{-6}\,\text{H}$, ce qui donne comme condition

$$\omega \ll 2 \times 10^{9}\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f \ll 3 \times 10^{8}\,\text{Hz}\,.$$

Pour toutes les fréquences usuelles en électronique, limitées au plus à $1 \times 10^{7}\,\text{Hz}$, négliger l'auto-induction du circuit est donc légitime.

II Boucle et moment magnétique

1 - $\vec{m} = ia^2\vec{n}$.

2 - $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -ia^2 B_0 \sin\theta\,\vec{e}_y$.

3 - $\Phi = \vec{B}_0 \cdot a^2\vec{n} = B_0 a^2 \cos\theta$.

4 - Faraday : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}B_0 a^2 \cos\omega t}{\mathrm{d}t} = B_0 a^2 \omega \sin\omega t$ d'où $i = e/R = \dfrac{B_0 a^2 \omega \sin\omega}{R}$.

5 - $\vec{\Gamma} = -\dfrac{(B_0 a^2 \omega \sin\omega)^2}{R}\,\vec{e}_y$.