Mécanique
Chapitre 5

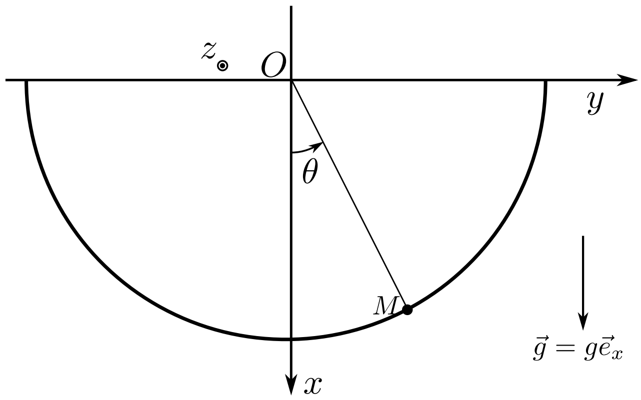
TD – Théorème du moment cinétique

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire")| [$\bullet\circ\circ$] : difficulté des exercices

I Snowbord dans un half-pipe $\star$ | [$\bullet\circ\circ$]

Nous reprenons l'exercice du chapitre 2 sur le snowboarder dans un half-pipe, afin de voir comment le traiter à l'aide du théorème du moment cinétique.

Pour simplifier, on considère que le snowboarder se déplace sur un plan en coupe perpendiculaire à l'axe du half-pipe. On l'assimile à un point matériel de masse m, qui glisse sans frottement, et on considère que le half-pipe est un demi-cylindre de rayon R constant. Le snowboarder démarre en $\theta = \pi/2$ avec une vitesse nulle.

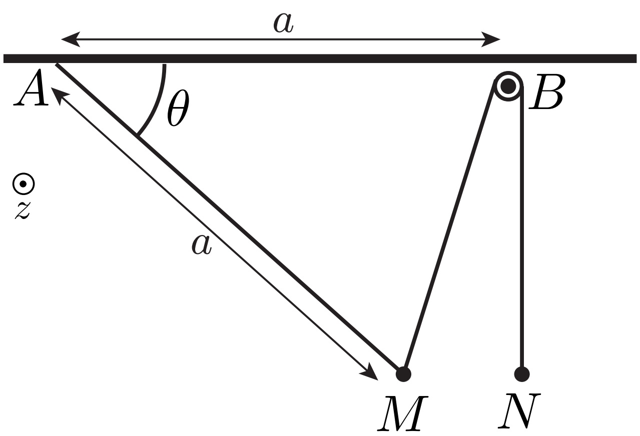


1 - En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation du mouvement portant sur l'angle θ (bilan des forces, expression des moments par rapport à un axe, expression du moment cinétique, TMC).

2 - Peut-on la résoudre simplement ? Dans quel cas faudrait-il se placer et quelle serait alors la forme générale des solutions ?

II Position d'équilibre statique [• • ○]

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions. $AB = a$. Sur le fil, en un point M tel que $AM = a$, est attachée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N . Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



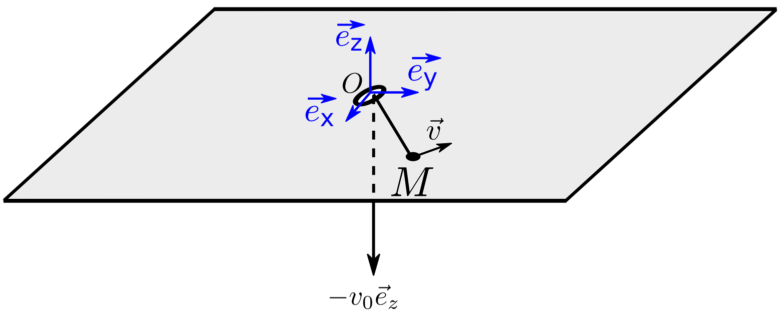
1 - Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A (il y a trois forces, et le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera l'angle $\theta = (AB,AM)$).

2 - Trouver une relation vérifiée par l'angle θ lorsque le système est à l'équilibre.

Facultatif : trouver la solution de cette équation. On pourra utiliser la relation $\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$. On discutera de la condition sur m et m' pour que la solution existe.

III Masse attachée à une ficelle [• • ○]

Un point matériel M de masse m, attaché à une ficelle, peut glisser sans frottement sur un support. La ficelle passe par un trou du support et est tirée vers le bas par un opérateur à une vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{e}_z$ ($v_0 > 0$). La masse m est lancée initialement avec une vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe Oz, et la longueur du fil sur le plan est initialement l_0.



1 - Choisir un système de coordonnées adaptées. Donner l'expression de la distance $r(t) = OM$ en fonction de l_0, v_0 et t.

Donner l'expression du moment cinétique du point M par rapport à O en fonction des mêmes grandeurs qui ci-dessus, ainsi que de m et $\dot{\theta}$.

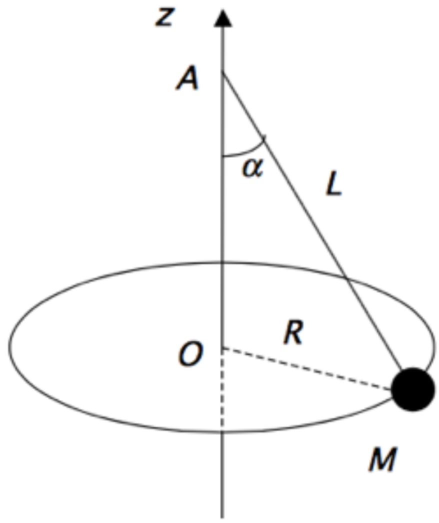
2 - Appliquer le théorème du moment cinétique au point M.

3 - En déduire l'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ du point M.

4 - Donner l'expression de l'énergie cinétique du point M. Comment varie-t-elle ? D'où provient cette augmentation d'énergie ?

IV Pendule conique [• • •]

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Az.
On donne une certaine vitesse initiale à la masse, afin de la faire tourner autour l'axe z. On note ω la vitesse angulaire ainsi atteinte. On note Oxy le plan dans lequel ce mouvement a lieu, et α l'angle qui s'établi entre l'axe et le fil.
On suppose un régime stationnaire atteint : α et ω restent constants.
On utilisera la base cylindrique dans le plan Oxy, d'axe Oz. La pesanteur est dirigée selon $-\vec{e}_z$.



1 - Étant donné que la force de tension du fil sur la masse est inconnue, par rapport à quel point va-t-il être judicieux de calculer les moments des forces ?

2 - À l'aide du théorème du moment cinétique, donner l'expression de l'angle α en fonction de L, ω et g.