

Énergie en mécanique

I Énergie cinétique, puissance et travail d'une force

1 - Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

2 - Puissance d'une force $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

>0 si force motrice, <0 si résistante.

3 - Travail d'une force

a/ élémentaire : $\delta W = \mathcal{P}dt = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

b/ entre A et B : $W_{AB} = \int_A^B \delta W$

reliés par le TEC

II Théorème de l'énergie cinétique

a/ Instantané (th. de la puissance cinétique) $\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}$

b/ Forme intégrale (th. de l'énergie cinétique) $E_{c,B} - E_{c,A} = \sum W_{AB}$

III Force conservative et énergie potentielle

1 - Définition

W_{AB} indépendant du chemin de A à B
 \Leftrightarrow il existe E_p telle que $\delta W = -dE_p$

3 - Retour à la force

cas 1D (axe x) :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx} \vec{e}_x$$

2 - Exemples d'énergies potentielles

Forces **conservatives** : il existe E_p

Pesanteur	$\vec{F} = m\vec{g}$	$E_p = mgz \uparrow^z$
Élastique (ressort)	$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}}$	$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$
Force de gravitation	$\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r$ <small>cf chapitre 4</small>	$E_p = -G\frac{mm'}{r}$
Force électrostatique	$\vec{F} = q\vec{E}$ <small>cf chapitre 6</small>	$E_p = qV$

Forces **non conservatives** :
 il n'existe pas d'énergie potentielle E_p associée

- Frottements avec l'air
- Frottements avec un support

Forces **qui ne travaillent pas** ($\vec{F} \perp \vec{v}$)
 - réaction normale \vec{N}
 - tension d'un fil \vec{T}
 n'interviennent pas dans E_m ni dans les théorèmes (TEM, TEC)

IV Théorème de l'énergie mécanique

a/ Définition : $E_m = E_c + E_p$

b/ Théorème : $E_{m,B} - E_{m,A} = \sum W_{AB,nc}$

Ce qu'il faut connaître

_____ (cours : I)

- ₁ Quelle est la définition de l'énergie cinétique d'une masse m de vitesse \vec{v} ?
- ₂ Quelle est la définition de la puissance d'une force?
- ₃ Quelle est la définition du travail élémentaire d'une force? (définition en fonction de la puissance \mathcal{P} , et définition en fonction du déplacement élémentaire $d\vec{l}$)
- ₄ Quelle est la définition du travail d'une force entre deux points A et B ?

_____ (cours : II)

- ₅ Comment s'énonce le théorème de l'énergie cinétique? (donner la forme intégrale et la forme instantanée)

_____ (cours : III)

- ₆ Quelles sont les deux définitions d'une force conservative?
 Donner un exemple de force conservative, et un exemple de force non conservative.
- ₇ Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur?
 Et celle de l'énergie potentielle élastique (force exercée par un ressort)?

►₈ Comment s'exprime la force \vec{F} en fonction de l'énergie potentielle $E_p(x)$ associée ?

_____ (cours : IV)

►₉ Comment s'énonce le théorème de l'énergie mécanique ?

Dans quels cas l'énergie mécanique d'un point matériel est-elle conservée au cours du mouvement ?

Ce qu'il faut savoir faire

_____ (cours : I)

►₁₀ Identifier si une force est motrice, résistante ou si elle ne travaille pas.

►₁₁ Calculer le travail d'une force sur un déplacement. →

EC1, EC1bis

_____ (cours : II)

►₁₂ Appliquer le théorème de l'énergie cinétique ou de la puissance cinétique. →

EC2, TD I

_____ (cours : III)

►₁₃ Distinguer force conservative et force non conservative.

_____ (cours : IV)

►₁₄ Utiliser le théorème de l'énergie mécanique. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales pour exprimer E_m . →

EC3, EC4, TD I, II, III, IV

Exercices de cours

Exercice C1 – Calcul de travail et de puissance : ascension d'un cycliste

Un cycliste de masse $m = 80$ kg (vélo et équipement inclus) effectue l'ascension du Ballon d'Alsace (dénivelé de 700 m).

1 - Calculer le travail W du poids lors de cette ascension.

2 - Le cycliste roule en ligne droite à 15 km/h sur une pente montante de 10% (donc avec un angle par rapport à l'horizontale de $\alpha = \arctan(10/100)$). Que vaut la puissance du poids ? Commenter son signe.

Comparer avec la puissance dégagée par le corps humain au repos qui est d'environ 100 W.

Correction

1 - Soit A le point de départ et B celui d'arrivée. Soit z un axe orienté vers le haut et h la hauteur de l'ascension.

Le poids $m\vec{g}$ est une force constante, donc :

$$W_{AB}(\vec{P}) = m\vec{g} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Or $\vec{g} = g\vec{e}_z$. Et $\vec{e}_z \cdot \overrightarrow{AB}$ est la composante selon z du vecteur \overrightarrow{AB} , donc $\vec{e}_z \cdot \overrightarrow{AB} = h$. D'où

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg\vec{e}_z \cdot \overrightarrow{AB} = mgh = 5,6 \times 10^5 \text{ J.}$$

2 - Faire un schéma. Puissance du poids :

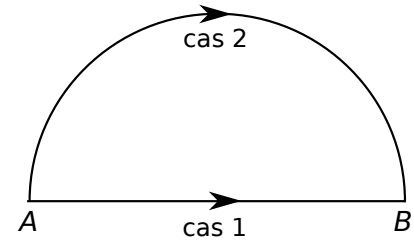
$$\mathcal{P} = \vec{P} \cdot \vec{v} = \|\vec{P}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{P}, \vec{v}) = mgv \cos(\alpha + \pi/2) = -mgv \sin \alpha.$$

L'AN donne $\mathcal{P} = -330$ W.

Négatif car dans une montée, le poids est résistant. Le cycliste doit donc fournir cette puissance pour avancer. C'est donc environ trois fois la puissance du corps humain au repos.

Exercice C1bis – Calcul de travail : frottements de l'air

Une voiture va d'un point A à un point B distants de $d = 10$ km, en roulant avec une vitesse constante. On modélise les frottements dus à l'air par une force $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ (avec λ qui dépend de v , constant ici).



- 1 - Pour chacune des trajectoires ci-contre, donner l'expression du travail de la force de frottement lors de ce déplacement.

Correction

$$1 - W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\lambda\vec{v} \cdot d\vec{l}.$$

Or \vec{v} et $d\vec{l}$ sont toujours colinéaires, donc $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v dl$.

Comme v est constante par hypothèse, on peut la sortir de l'intégrale : $W_{AB}(\vec{F}) = -\lambda v \int_A^B dl$.

Or $\int_A^B dl = L_{AB}$, longueur du parcours de A à B (cf "notions mathématiques"). On a donc le résultat général :

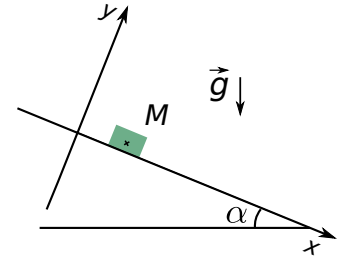
$$W_{AB}(\vec{F}) = -\lambda v L_{AB}.$$

★ Cas 1 : $L_{AB} = d$ donc $W_{AB}(\vec{F}) = -\lambda v d$.

★ Cas 2 : $L_{AB} = \frac{1}{2} 2\pi \frac{d}{2} = \frac{\pi d}{2}$ donc $W_{AB}(\vec{F}) = -\lambda v \frac{\pi d}{2}$.

Exercice C2 – Application du théorème de l'énergie cinétique : glissade sans frottement

On considère un objet qui glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On le modélise par un point matériel M de masse m glissant sans frottements. L'objet est lâché sans vitesse initiale, et on choisit le repère tel qu'à tout instant, $\vec{v} = v(t) \vec{e}_x$ (cf schéma). Le référentiel du plan est supposé galiléen.



- 1 - Faire un bilan des forces et donner l'expression de la puissance de chacune des forces, notamment en fonction de m , g , v et α .
- 2 - En déduire une équation différentielle suivie par la composante v de la vitesse.

Correction

- 1 - Faire un schéma. Bilan des forces et calculs des puissances :

– Réaction normale du support \vec{N} . On a $\mathcal{P}(\vec{N}) = \vec{N} \cdot \vec{v} = 0$ car $\vec{N} \perp \vec{v}$.

– Poids \vec{P} . On a $\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = \|\vec{P}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{P}, \vec{v}) = mgv \cos(\pi/2 - \alpha) = mgv \sin \alpha$.

(S'il y avait eu des frottements \vec{T} , leur puissance ne serait pas nulle)

- 2 - Théorème de la puissance cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \mathcal{P}(\vec{N}) + \mathcal{P}(\vec{P}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= mgv \sin \alpha \\ \Rightarrow m v \dot{v} &= mgv \sin \alpha \\ \Rightarrow \dot{v} &= g \sin \alpha \end{aligned}$$

Exercice C3 – Application du TEM sur le cas de la chute libre

On considère une masse m en chute libre sans vitesse initiale dans un champ de pesanteur \vec{g} uniforme. On néglige tout frottement et le référentiel d'étude est galiléen. On utilise un axe z orienté vers le bas, avec $z = 0$ initialement.

- 1 - Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de la masse en fonction notamment de z .
- 2 - En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse de la masse après une chute d'une hauteur h .

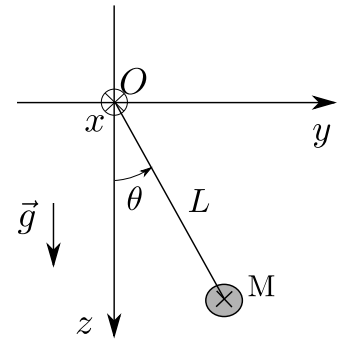
Correction

- 1 - $E_p = -mgz$.
- 2 - Bilan des forces : le poids. Toutes les forces sont conservatives, donc $E_m = \text{cst}$.
Donc en notant A le point de départ et B le point d'arrivée, on a $E_m(A) = E_m(B)$.
Or $E_m(A) = 0 - 0 = 0$ (car la vitesse de départ est nulle, et car $z_A = 0$ par choix de l'origine de l'axe),
et $E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh$ (car $z_B = h$).
Ainsi, $E_m(A) = E_m(B)$ donne $0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh$ et donc $v_B = \sqrt{2gh}$.

Exercice C4 – Application du TEM sur le cas du pendule simple

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M . Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable, on note L sa longueur. On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ constante.

- 1 - Donner l'expression de l'énergie cinétique de la masse m en fonction des coordonnées polaires du point M .
- 2 - Faire de même pour l'énergie potentielle de pesanteur du point M .
- 3 - Que peut-on dire du travail de la force de tension du fil ?
- 4 - En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, trouver une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire une quantité comprenant $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ qui reste constante tout au long du mouvement.
- 5 - En déduire l'équation du mouvement, qui porte sur $\ddot{\theta}$ et θ .



Correction

- 1 - En polaires on a $\vec{OM} = L\vec{e}_r$, et en dérivant : $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
D'où $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$.
- 2 - Avec un schéma on voit que $z = L \cos \theta$.
L'énergie potentielle de pesanteur est donc $E_p = -mgz = -mgL \cos \theta$.
- 3 - On a toujours $\vec{v} \perp \vec{T}$ donc la tension du fil a une puissance et un travail nuls. Elle n'intervient pas dans les bilans énergétiques.
- 4 - Toutes les forces sont conservatives (ou ne travaillent pas), donc $E_m = \text{cst}$.

On a donc : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta = \text{cst}$.

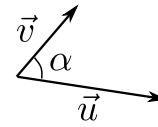
- 5 - On dérive :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mL^2 \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} - mgL \frac{d \cos \theta}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mL^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL \dot{\theta} \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow L^2\ddot{\theta} + gL \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

On retrouve bien la même équation qu'au chapitre précédent.

- Produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

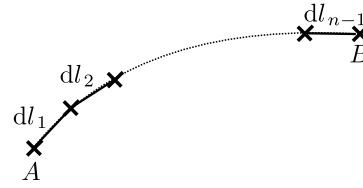
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha.$$



- Intégrale d'une longueur élémentaire dl le long d'une courbe AB :

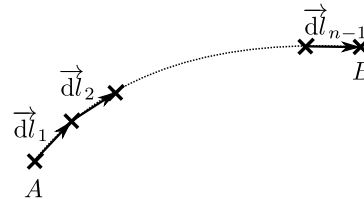
$$\int_A^B dl = L_{AB}$$

où L_{AB} est la longueur de la courbe de A à B .



- Intégrale du déplacement élémentaire \vec{dl} le long d'une courbe AB :

$$\int_A^B \vec{dl} = \vec{AB}$$



Cours

I – Énergie cinétique, puissance et travail d'une force

1 – Énergie cinétique

Définition : énergie cinétique

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse v (en norme).
Son énergie cinétique est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad (\text{unité SI : joule})$$

Remarque : la vitesse dépend du référentiel, donc l'énergie cinétique également.

2 – Puissance d'une force

Une force qui agit sur le point M peut, selon les cas, faire augmenter la vitesse de M , la faire diminuer, ou la laisser constante (mais en changeant la direction). L'outil qui permet de quantifier ceci est la *puissance* de la force.

Définition : puissance d'une force

Soit un point matériel M de vitesse \vec{v} , soumis à une force \vec{F} .

La puissance de la force \vec{F} est le produit scalaire des vecteurs force et vitesse :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unité SI : watt.

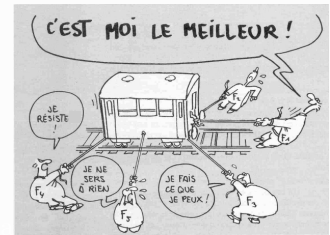
Ce sont des joules par seconde : la puissance donne donc le rythme auquel l'énergie est reçue par le système.

Si $\mathcal{P} < 0$, c'est que l'énergie n'est en fait pas reçue, mais produite par le système.

Remarque : La vitesse dépend du référentiel d'étude, donc la puissance également.

Propriétés

- ▶ Si $\mathcal{P} > 0$, on dit que la force est **motrice** : elle a tendance à augmenter la norme de la vitesse.
- ▶ Si $\mathcal{P} < 0$, on dit que la force est **résistante** : elle a tendance à diminuer la norme de la vitesse.
- ▶ Si $\mathcal{P} = 0$, la force ne modifie pas la norme de la vitesse, mais éventuellement sa direction. C'est le cas si $\vec{v} \perp \vec{F}$.



Exemples :

→₁ Indiquer dans chacun des cas ci-dessous le caractère moteur ou résistant de la force.

- ▶ Une bille en acier chute dans du glycérol.

Le liquide exerce une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

Schéma. $\vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = -\lambda v^2 < 0$ donc la force est résistante.

- ▶ La bille précédente est également soumise au poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Schéma. $\vec{P} \cdot \vec{v} = m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv > 0$ donc la force est motrice.

- ▶ La Terre exerce sur la Lune une force d'attraction gravitationnelle \vec{F} dirigée vers le centre de la Terre. La trajectoire lunaire est en première approximation circulaire.

Schéma. $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ donc la force modifie uniquement la direction de \vec{v} , mais pas sa norme.

3 – Travail d'une force

a/ Travail élémentaire d'une force

Travail élémentaire d'une force (définition 1)

Le travail élémentaire d'une force \vec{F} agissant pendant une durée infinitésimale dt est la puissance exercée par cette force multipliée par cette durée :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}) dt$$

Unité SI : Joule

- ▶ $\delta W > 0$ pour une force motrice, $\delta W < 0$ pour une force résistance.
Si $\delta W = 0$, on dit que la force ne travaille pas.

Remarque importante sur les notations :

On utilise deux notations pour les infiniments petits : d et δ .

- ▶ Avec d : la notation df indique une différence de la fonction f évaluée entre deux instants très proches ou deux points très proches.

Exemples :

- $df = f(M') - f(M)$ avec M et M' très proches, ou encore $dg = g(t') - g(t)$ avec t et t' deux instants très proches.

- dt est un temps élémentaire, ou infinitésimal, c'est-à-dire très court.

C'est la différence entre deux instants très proches : $dt = (t + dt) - t$.

- Nous avons déjà vu le déplacement élémentaire \vec{dl} .

C'est bien la différence du vecteur $\vec{OM}(t)$ entre deux instants très proches : $\vec{dl} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t) = \vec{M}(t + dt) - \vec{M}(t)$.

- ▶ La notation δ est utilisée pour les cas où la quantité infinitésimale ne peut pas être vue comme la différence d'une fonction entre deux instants ou deux points.

Exemples :

- δW ne peut pas être vu comme la différence d'une fonction évaluée à deux instants très proches ou entre deux points très proches.

En effet, noter dW signifierait que $dW = W(M') - W(M)$ avec M et M' très proches, ce qui n'a aucun sens, puisque le travail n'est pas défini en un point donné, mais pour un déplacement.

Seconde expression du travail élémentaire :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt \Rightarrow \boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

D'où la définition suivante :

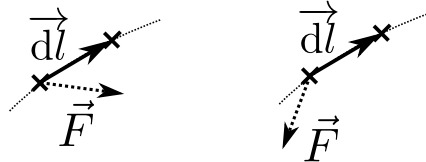
Travail élémentaire d'une force (définition 2)

Le travail élémentaire d'une force \vec{F} agissant pendant un déplacement \vec{dl} est le produit scalaire de la force et du déplacement élémentaire :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

(Il faut retenir les deux définitions, équivalentes, du travail élémentaire.)

~>2 Indiquer dans chacun des cas ci-dessous le caractère moteur ou résistant de la force. (correction : gauche : moteur, droite : résistant)



b/ Travail d'une force le long d'un déplacement

Lorsque le point M effectue un déplacement fini (par opposition à élémentaire) entre deux points A et B , alors le travail total de la force \vec{F} est obtenu en sommant tous les travaux élémentaires le long du déplacement.

Pour cela, on décompose la trajectoire AB en une succession de n déplacements élémentaires $\vec{dl}_i = \vec{A_i A_{i+1}}$, et on somme :

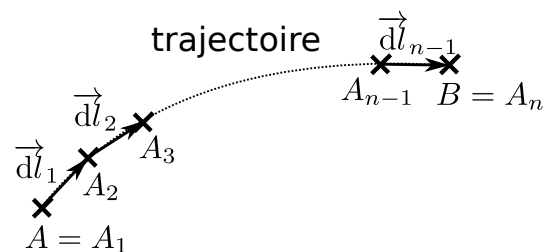
$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum_i \delta W_i = \vec{F}_1 \cdot \vec{A_1 A_2} + \vec{F}_2 \cdot \vec{A_2 A_3} + \dots + \vec{F}_{n-1} \cdot \vec{A_{n-1} A_n}$$

En passant à la limite où n tend vers l'infini, la somme devient une intégrale :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

(C'est similaire au cas du calcul de la valeur moyenne d'un signal à l'aide d'une intégrale : partie systèmes linéaires, chapitre 4.0 (signal), I.2.c.)

On retiendra donc :



Définition : travail d'une force

Le travail d'une force \vec{F} lors du déplacement du point M entre les points A et B est :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

L'intégrale s'effectue sur la trajectoire effectivement suivie.

Dans le cas où la force \vec{F} est constante au cours du mouvement, ceci se simplifie en :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Remarque : Le travail (élémentaire ou non) dépend du référentiel, car la trajectoire du point M en dépend.

Démonstration pour le cas de la force constante :

↪₃ Démontrer l'expression $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ dans le cas où la force \vec{F} est constante au cours du mouvement.

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}) &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{l} \\ &= \vec{F} \cdot \vec{AB} \end{aligned}$$

Exemples

Deux exemples de calcul du travail d'une force : ↪₄ **EC1** (ascension d'un cycliste). ↪₅ **EC1bis** (frottements de l'air).

Le second exemple montre une propriété importante : pour un point de départ A et un point d'arrivée B fixés, le travail d'une force entre A et B dépend en général du chemin suivi.

Mais pas toujours, par exemple dans le cas du poids, l'EC 1bis montre que son travail ne dépend que de la différence d'altitude entre départ et arrivée, pas du chemin suivi.

II – Théorème de l'énergie cinétique

Nous l'avons dit, l'action d'une force sur un point matériel M peut faire varier sa vitesse : plus précisément, la puissance d'une force ou son travail entraînent une variation de l'énergie cinétique (et donc de v^2), selon le théorème suivant.

a/ Version instantanée

Théorème de l'énergie cinétique, version instantanée

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M , d'énergie cinétique E_c et soumis à une somme de forces que l'on note $\sum \vec{F}$ et dont la somme des puissances associées est $\sum \mathcal{P}(\vec{F})$.

On a :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}).$$

Ce théorème porte le nom de théorème de l'énergie cinétique (version instantanée), ou de théorème de la puissance cinétique.

b/ Version intégrale

Théorème de l'énergie cinétique, version intégrale

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M , allant d'un point A à un point B .

Alors sa variation d'énergie cinétique entre A et B est égale au travail de toutes les forces qui s'exercent sur le point :

$$E_{c,B} - E_{c,A} = \sum W_{AB}(\vec{F}).$$

- On note aussi ΔE_c la variation entre A et B : $\Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A}$.
- Ce théorème porte le nom de théorème de l'énergie cinétique (version intégrale).

c/ Démonstrations de a/ et b/

(démonstrations à suivre au tableau, ne sont pas à savoir refaire)

Considérons un point matériel M de masse m , soumis à un ensemble de forces que l'on note $\sum \vec{F}$.

L'étude est effectuée dans un référentiel galiléen.

On applique le PFD au système masse m : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$.

On prend le produit scalaire par la vitesse \vec{v} :

$$\begin{aligned} m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{v} \cdot \sum \vec{F} \\ \Leftrightarrow m \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} &= \sum \vec{v} \cdot \vec{F} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= \sum \mathcal{P}(\vec{F}) \\ \Leftrightarrow \frac{dE_c}{dt} &= \sum \mathcal{P}(\vec{F}). \end{aligned}$$

Passage de la ligne 1 à 2 : $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{v} \cdot \vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$

Ci-dessus nous avons démontré la version instantanée. Pour arriver à la version intégrale on l'intègre le long de la trajectoire du point A au point B :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \sum \mathcal{P}(\vec{F}) \\ \Rightarrow \int_A^B \frac{dE_c}{dt} dt &= \int_A^B \sum \mathcal{P}(\vec{F}) dt \\ \Rightarrow E_{c,B} - E_{c,A} &= \sum \int_A^B \mathcal{P}(\vec{F}) dt \\ \Rightarrow E_{c,B} - E_{c,A} &= \sum W_{AB}(\vec{F}). \end{aligned}$$

d/ Exemple d'utilisation

↪₆ Glissade sans frottement, faire l'EC2.

III – Force conservative et énergie potentielle

1 – Définitions

a/ Force conservative, première définition

Force conservative (définition 1)

Une force est conservative si son travail le long d'une trajectoire AB ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B .

↪₇ Quelle force, vue plus tôt dans ce cours, est une force conservative? Quel exemple n'en est pas une?

Le poids est une force conservative, la résultante des frottements de l'air n'en est pas une.

b/ Énergie potentielle

- Si le travail ne dépend pas du chemin suivi entre deux points fixes A et B , c'est qu'il existe une fonction $f(M)$ telle que

$$W_{AB}(\vec{F}) = f(B) - f(A) = \Delta f.$$

En effet, si c'est le cas, alors le travail ne dépend que des valeurs de f en B et en A , et pas de la trajectoire suivie pour relier ces deux points.

- Si une telle fonction existe, on définit l'énergie potentielle associée à \vec{F} comme : $E_p(M) = -f(M)$. On a donc :

$$W_{AB}(\vec{F}) = -(E_p(B) - E_p(A)) = -\Delta E_p.$$

(la notation Δ signifie valeur à l'arrivée moins valeur au départ, donc ici $\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A)$)

- Si le point B est proche de A de manière infinitésimale, alors $E_p(B) - E_p(A) = dE_p$
(on utilise bien un d car c'est la différence d'une fonction, ici E_p , entre deux points proches).

Bilan à retenir :

Force conservative (définition 2)

Une force \vec{F} est conservative s'il existe une fonction $E_p(M)$ telle que le travail élémentaire de \vec{F} est égal à l'opposé de la différentielle de la fonction E_p :

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p.$$

On dit alors que la force \vec{F} dérive de l'énergie potentielle E_p .

$E_p(M)$ ne dépend que de la position du point M .

Remarque : sous forme intégrée, ceci s'écrit $W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta E_p$.

Remarque : lorsque le travail associé à une force est nul, elle n'entre pas dans les bilans énergétiques. On ne dit pas qu'il s'agit d'une force conservative, mais que la force ne travaille pas.

2 – Exemples d'énergies potentielles

a/ Expressions

Énergie potentielle de pesanteur

On considère un point matériel de masse m dans un champ de pesanteur uniforme \vec{g} .

Le poids est une force conservative, qui dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p = mgz,$$

lorsque z est un axe orienté vers le haut.

Pour un axe z orienté vers le bas, $E_p = -mgz$.

Remarque : une énergie potentielle est toujours définie à une constante près. Ci-dessus on l'a choisie pour avoir $E_p(z = 0) = 0$, mais d'autres choix sont possibles.

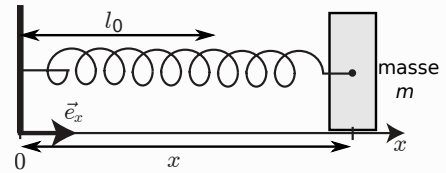
Interprétation : plus la masse est à une altitude élevée, plus son énergie potentielle de pesanteur est importante. Cette énergie peut être ensuite convertie en une autre forme d'énergie, en énergie cinétique par exemple si on laisse chuter la masse.

Énergie potentielle élastique

La force de rappel d'un ressort est une force conservative, qui dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2.$$

(ressort de raideur k et de longueur à vide l_0)



Interprétation : plus le ressort est comprimé ou étiré par rapport à sa longueur au repos, plus son énergie potentielle élastique est importante. Cette énergie emmagasinée peut être ensuite convertie en une autre forme d'énergie, en énergie cinétique par exemple si on laisse le ressort se détendre.

b/ Démonstrations

Les étapes pour obtenir l'expression de E_p sont toujours les mêmes.

► Énergie potentielle de pesanteur.

– Écrire l'expression du travail élémentaire δW associé à la force (ici le poids) :

$$\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \text{ et } \vec{F} = -mg\vec{e}_z,$$

$$\text{donc } \delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -mg\vec{e}_z \cdot \vec{dl} = -mgdz.$$

– Supposer que $\delta W = -dE_p$:

$$\text{alors } dE_p = mgdz.$$

– En déduire une équation différentielle vérifiée par $E_p(z)$ et la résoudre :

$$\text{ici on a } \frac{dE_p}{dz} = mg, \text{ et donc par intégration } E_p(z) = mgz + A.$$

On choisit la constante A comme on veut car seuls les ΔE_p interviennent. Souvent on la prend nulle.

► Énergie potentielle élastique.

– Écrire l'expression du travail élémentaire δW associé à la force :

$$\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \text{ et } \vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(x - l_0)\vec{e}_x,$$

$$\text{donc } \delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -k(x - l_0)dx.$$

– Supposer que $\delta W = -dE_p$:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -k(x - l_0)dx.$$

– En déduire une équation différentielle vérifiée par $E_p(x)$ et la résoudre :

$$\text{ici on a } dE_p = k(x - l_0)dx, \text{ soit } \frac{dE_p}{dx} = k(x - l_0), \text{ et donc par intégration } E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + A, \text{ avec } x \text{ la longueur totale du ressort.}$$

On choisit la constante A comme on veut car seuls les ΔE_p interviennent. Souvent on la prend nulle.

3 – Retour à la force à partir de E_p

Il est possible de retrouver l'expression de la force \vec{F} à partir de la connaissance de l'énergie potentielle E_p .

Nous montrons ceci dans le cas unidimensionnel : mouvement selon un axe x et force $\vec{F} = F\vec{e}_x$.

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot \vec{dl} \\ \Rightarrow -dE_p &= F dx \\ \Rightarrow F &= -\frac{dE_p}{dx}. \end{aligned}$$

On comprend alors pourquoi on dit que "la force dérive de l'énergie potentielle".

Remarque : dans le cas général (pas forcément 1D), on a l'expression $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$, avec $\overrightarrow{\text{grad}}$ l'opérateur gradient que vous verrez l'an prochain.

IV – Théorème de l'énergie mécanique

a/ Définition

Définition : énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel M est la somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle de toutes les forces conservatives auxquelles il est soumis :

$$E_m = E_c + E_p.$$

b/ Le théorème

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M , allant d'un point A à un point B .

Alors sa variation d'énergie mécanique entre A et B est égale au travail de toutes les forces non conservatives qui s'exercent sur le point :

$$E_{m,B} - E_{m,A} = \sum W_{AB,nc}(\vec{F}).$$

- On note aussi $\Delta E_m = \sum W_{AB,nc}(\vec{F})$.
- Attention, seules les forces non conservatives interviennent dans les travaux à droite. Les forces conservatives sont prises en compte via leurs énergies potentielles.

Cas particulier important :

Si toutes les forces sont conservatives ou ne travaillent pas, alors $\Delta E_m = 0$: l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

Le cas où les forces sont conservatives ou ne travaillent pas est important.

- C'est souvent le cas lorsqu'on néglige tout type de frottements. On comprend le vocabulaire : une force conservative "conserve" l'énergie mécanique. On parle alors de mouvement conservatif.
- Dans ce cas, le théorème de l'énergie mécanique fournit une quantité, E_m , constante au cours du mouvement. On dit que E_m est une *intégrale première* du mouvement.
- On peut obtenir la valeur de E_m en l'évaluant à $t = 0$ (conditions initiales).
- En exploitant le fait que $\frac{dE_m}{dt} = 0$, on peut aboutir à l'équation du mouvement (s'il n'y a qu'un seul degré de liberté).

c/ Une démonstration

(démonstrations à suivre au tableau, n'est pas à savoir refaire)

Dans un référentiel galiléen, considérons un point matériel M de masse m , allant d'un point A à un point B , et soumis à un ensemble de forces que l'on note $\sum_i \vec{F}_i$.

On applique le théorème de l'énergie cinétique au point M : $\Delta E_c = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i)$.

On sépare les forces en deux catégories :

- Celles qui sont conservatives. Elles dérivent d'une énergie potentielle $E_{p,i}$ et donc $W_{AB}(\vec{F}_i) = -\Delta E_{p,i}$.
- Celles qui ne sont pas conservatives.

On a donc :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \sum_{i, \text{non conservatives}} W_{AB}(\vec{F}_i) + \sum_i -\Delta E_{p,i} \\ \Rightarrow \Delta E_c + \sum_i \Delta E_{p,i} &= \sum_{i, \text{non conservatives}} W_{AB}(\vec{F}_i) \end{aligned}$$

C'est bien le théorème de l'énergie mécanique.

→ On retiendra donc qu'il s'agit simplement d'une reformulation du théorème de l'énergie cinétique, où les travaux des forces conservatives ont été écrits sous forme de ΔE_p .

d/ Exemples d'applications

↪₈ **EC3** : chute libre.

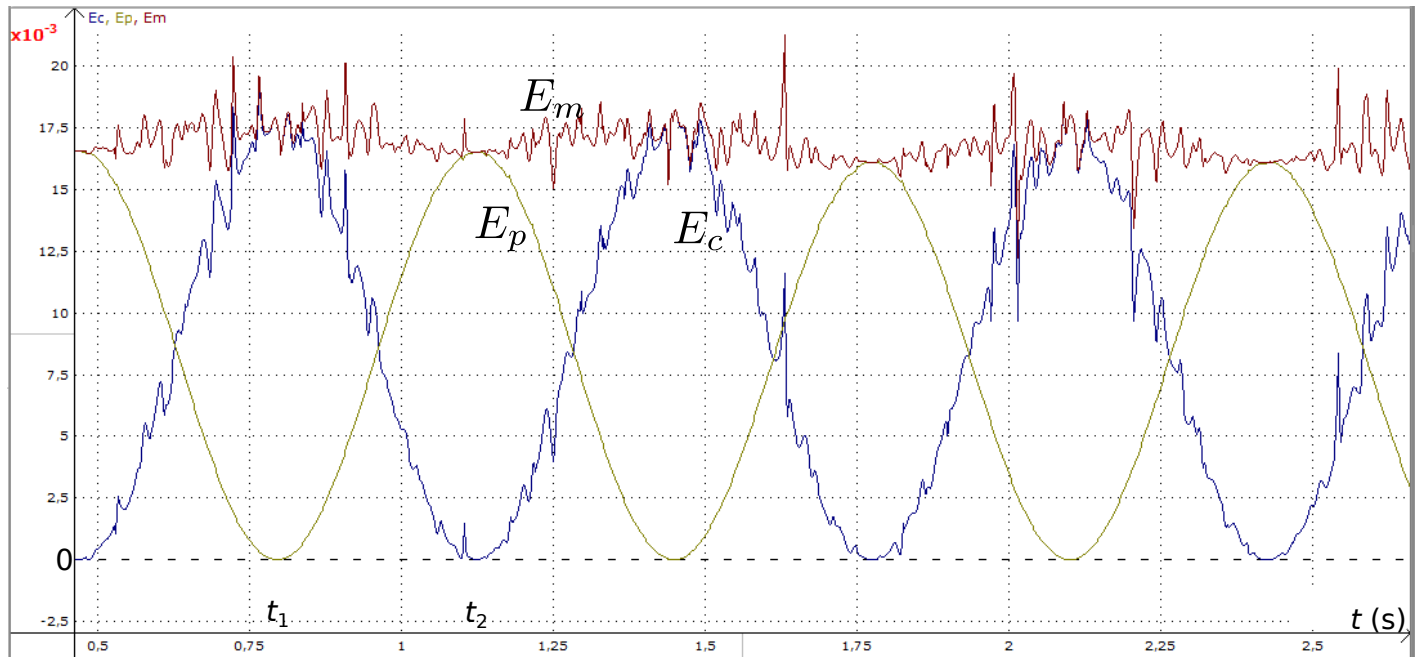
↪₉ **EC4** : pendule simple.

Expérience : On dispose d'un pendule avec un capteur de position angulaire. On réalise une acquisition sur une dizaine d'oscillations.

On mesure $L = 0,45 \text{ m}$, $m = 0,180 \text{ g}$, on connaît $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On suppose que les hypothèses de l'étude s'appliquent.

On calcule alors $\dot{\theta}$, puis $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$ et $E_p = mgL(1 - \cos \theta)$.

Observations ci-dessous.



↪₁₀ Indiquer la position du pendule à l'instant t_1 , et à l'instant t_2 .

Instant t_1 : E_c (et donc v) maximale, et E_p (donc z) minimale → le pendule est en $\theta = 0$.

Instant t_2 : E_c (et donc v) nulle, et E_p (donc z) maximale → le pendule est en $\theta = \theta_{\max}$, juste au moment où il fait demi-tour.