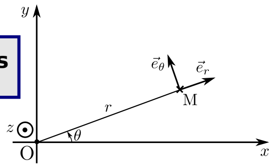
Partie VI : Mécanique
Chapitre 2

Mouvements en coordonnées non cartésiennes

I Coordonnées polaires

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \longrightarrow \vec{v}$ et $\vec{a}$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{dt}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{dt}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$

3 - Déplacement élémentaire

$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$ à connaître

$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$ à savoir retrouver (schéma)

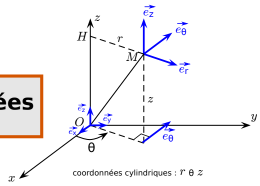
$\longrightarrow$ on en déduit $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{dt}}$

4 - Cas du mouvement circulaire

- uniforme ou non
- savoir trouver l'accélération radiale et tangentielle

II Coordonnées cylindriques

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \longrightarrow \vec{v}$ et $\vec{a}$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{dt}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

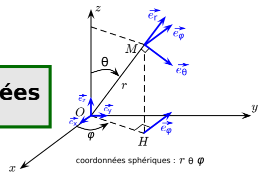
$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{dt}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$

3 - Déplacement élémentaire

$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$ à savoir retrouver (schéma)

III Coordonnées sphériques

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et pour $\vec{v}$ et $\vec{a}$

3 - Déplacement élémentaire

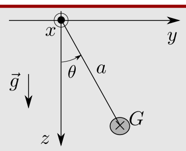
à savoir retrouver (schéma)

↑ **Cinématique** (étude du mouvement sans s'intéresser à ses causes)

↓ **Dynamique** (étude du mouvement provoqué par l'action des forces)

IV Application : le pendule simple

a/ Équation du mouvement
Approximation linéaire
Résolution
b/ Équation du portrait de phase



Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

►1 Réaliser un schéma avec les coordonnées polaires. Comment s'exprime $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont les coordonnées d'un point M ? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées ?

►2 Comment s'expriment $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{dt}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{dt}}$?

►3 Quelle est la définition d'un mouvement circulaire uniforme ? Et circulaire non uniforme ?

►4 Pour une trajectoire plane, vers quel lieu le vecteur accélération pointe-t-il ?

——— (cours : II)

►5 Réaliser un schéma avec les coordonnées cylindriques. Comment s'exprime $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont les coordonnées d'un point M ? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées ?

►6 Comment s'expriment $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{dt}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{dt}}$?

——— (cours : III)

►7 Réaliser un schéma avec les coordonnées sphériques (faisant apparaître les vecteurs de la base locale). Comment s'exprime $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont les coordonnées d'un point M ? Quels sont les domaines de variation de ces coordonnées ?

Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I et II)

▶8 Établir les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère polaire (cours partie I) ou cylindrique (cours partie II). → **EC2**, **EC2bis**

▶9 Exprimer à partir d'un schéma l'expression du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ en coordonnées cartésiennes, polaires ou cylindriques. En déduire l'expression du vecteur vitesse. cours I.3 et II.3

▶10 Cas particulier du mouvement circulaire (uniforme ou non) : savoir retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération ; identifier les liens entre rayon de la trajectoire, norme de la vitesse, sa dérivée, et les composantes de l'accélération. → **EC3**, TD II

——— (cours : III)

▶11 Exprimer à partir d'un schéma l'expression du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ en coordonnées sphériques. cours III.3

——— (cours : IV)

▶12 Savoir mener l'étude du pendule simple à l'aide du principe fondamental de la dynamique (en coordonnées polaires) : établir l'équation du mouvement, faire l'approximation linéaire pour se ramener au cadre de l'oscillateur harmonique, résoudre l'équation. → **EC4**

▶13 Pendule simple : dans l'approximation linéaire, savoir établir l'équation du portrait de phase. cours IV

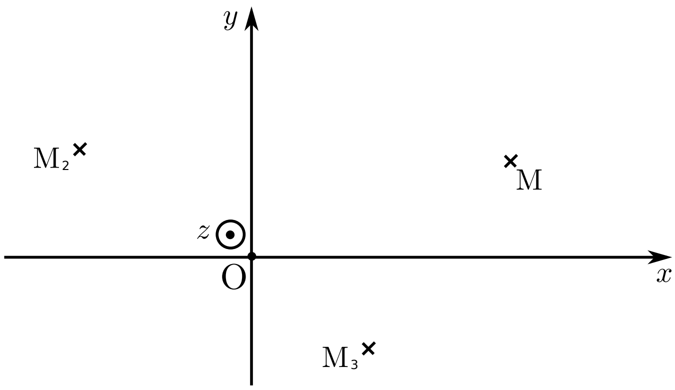
Exercices de cours

Exercice C1 – Coordonnées polaires

1 - Pour chaque point M du schéma, dessiner les vecteurs de la base $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

2 - Quelle est l'expression du vecteur position en fonction des vecteurs de la base polaire et des coordonnées polaires ?

3 - Établir l'expression des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et θ.



Exercice C2 – Coordonnées polaires : vitesse et accélération

On se place dans un repère en coordonnées cartésiennes à deux dimensions (dans un plan).

1 - Faire un schéma du repère. Placer un point M.

2 - Donner les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$.

On ajoute un repère en coordonnées polaires.

3 - Faire apparaître les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ au point M, la distance r et l'angle θ.

4 - Que valent les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$?

5 - En déduire les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le repère polaire.

Exercice C2bis – Coordonnées cylindriques : vitesse et accélération

On se place dans un repère en coordonnées cylindriques.

1 - Faire un schéma permettant de représenter ces coordonnées. En particulier faire apparaître les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ au point M, les distances r et z, et l'angle θ.

2 - Que valent les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}$?

3 - En déduire les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le repère cylindrique.

Exercice C3 – Mouvement circulaire uniforme

On considère un point M en mouvement circulaire uniforme, de rayon R, autour d'un centre O.

1 - Choisir un repère adapté à l'étude du problème. Faire un schéma.

2 - Exprimer le vecteur position, vitesse et accélération dans le repère de coordonnées polaires.

3 - Exprimer le vecteur accélération en fonction de $\|\vec{v}\|$, R et $\vec{e}_r$ seulement.

Exercice C4 – Pendule simple

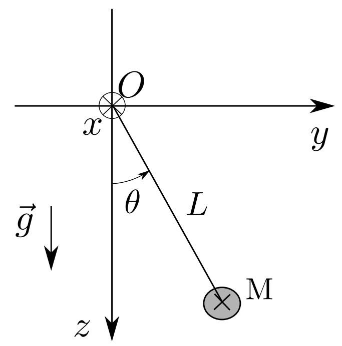
On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note L sa longueur. On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$ constante.

1 - Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires. Faire de même pour la vitesse et l'accélération du point M.

2 - Faire un bilan des forces. À l'aide du PFD, en déduire une équation différentielle portant sur $\theta(t)$ uniquement.

3 - Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre. On supposera qu'à $t = 0$ le pendule est en $\theta = 0$ et qu'on lui communique une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$.

4 - Que vaut la période des oscillations pour une masse de 1,0 kg et un fil de longueur 1,0 m ?



Méthodes

Mise en garde : ne JAMAIS écrire une égalité entre un vecteur et un scalaire !

Par exemple $m\vec{a} \neq mg$.

> **Méthode : Comment obtenir l'équation du mouvement pour un problème de mécanique ?**
>
> - Système : à définir.
> - Référentiel : à définir.
> - Repère : à définir, au choix parmi cartésien, polaire, cylindrique (et parfois sphérique).
> - Schéma, en précisant les axes. Placer le point M à un instant quelconque, et les vecteurs de base.
> - Bilan des forces : liste des forces ; les exprimer en fonction des vecteurs de base du repère ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ si cartésien, ou $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ si polaire, etc.) ; les représenter sur le schéma.
> - Application du PFD. Il faut exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction des vecteurs de base du repère ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ si cartésien, ou $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ si polaire, etc.).
> - Projection sur les vecteurs de la base pour obtenir les équations du mouvement, qui portent sur $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ si repère cartésien, ou sur $r(t)$, $\theta(t)$ si repère polaire, etc.
> - Il faut ensuite résoudre ces équations : solution générale ou primitive, déterminer les constantes avec les CI.

Cours

I – Coordonnées polaires

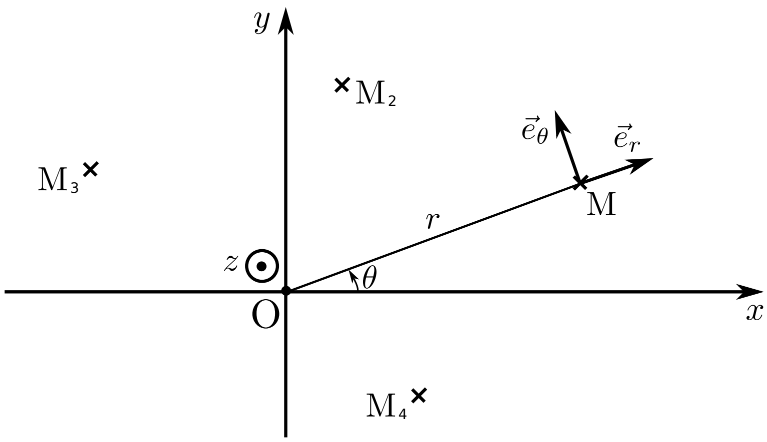
1 – Description des coordonnées

a/ Rappel sur les coordonnées cartésiennes dans un plan

- point M repéré par ses coordonnées x et y,
- vecteurs de la base $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$,
- position $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$,
- vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$,
- accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$.

b/ Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires permettent de repérer un mouvement dans un plan, et sont appropriées dans le cas de mouvements circulaires, elliptiques, etc.



Repérage et définitions :

- Un point M est repéré par deux coordonnées : la distance r et l'angle θ.

  On a $OM = r$, et θ est l'angle entre OM et l'axe des x.
- $r \geq 0$ et $\theta \in [0{,}2\pi]$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$.

Attention : La base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ est une base locale, elle varie en fonction du point M.
Ces deux vecteurs *ne sont donc pas constants.*
En revanche ils sont bien de norme 1, sont orthogonaux entre eux et forment une base directe.

$\rightsquigarrow_1$ Compléter le schéma ci-dessus en faisant apparaître, pour chaque point M, les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, la distance r et l'angle θ.

$\rightsquigarrow_2$ Quelle est l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées polaires et des vecteurs de la base polaire ?

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$\rightsquigarrow_3$ Pour réviser tout ceci : **EC1**.

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} &= \dot{\theta}\vec{e}_\theta,\\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\theta}\vec{e}_r,\end{aligned}}$$

Il faut connaître par cœur ce résultat.

Démonstration :
$\rightsquigarrow_4$ (à faire sur feuille) a/ Exprimer $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base cartésienne. b/ Dériver par rapport au temps.

$\rightsquigarrow_5$ À partir de là, il faut être capable de retrouver les expressions de $\vec{v}$, $\vec{a}$. Pour voir comment, faire l'**EC2**.

Bilan en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

(les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont pas à connaître par cœur, mais à retrouver rapidement à partir de $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ que l'on dérive, comme dans l'EC2)

Remarque : On peut utiliser la notation $\vec{v} = v_r\,\vec{e}_r + v_\theta\,\vec{e}_\theta$, avec v_r la composante de $\vec{v}$ selon $\vec{e}_r$ et v_θ la composante selon $\vec{e}_\theta$. On a donc ici $v_r = \dot{r}$ et $v_\theta = r\dot{\theta}$.

De même pour $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$.

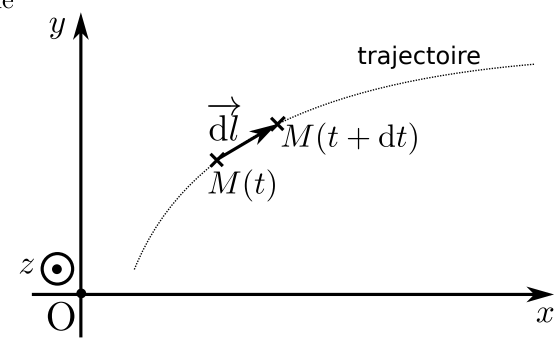
3 – Déplacement élémentaire

On considère un instant t, et un instant $t + \mathrm{d}t$ très proche ($\mathrm{d}t$ est une durée très courte, dite *infinitésimale*).

- Instant t : le point M est en $M(t)$.
- Instant $t + \mathrm{d}t$: le point M est en $M(t + \mathrm{d}t)$.

On définit le déplacement élémentaire $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}.}$

La vitesse du point M au temps t (appelée aussi vitesse instantanée) est alors : $\boxed{\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t}.}$



$\rightarrow$ le calcul du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ permet d'obtenir l'expression de $\vec{v}$.
C'est donc une seconde méthode pour obtenir $\vec{v}$, parfois plus pratique que celle vue en I.2.

a/ En coordonnées cartésiennes dans un plan

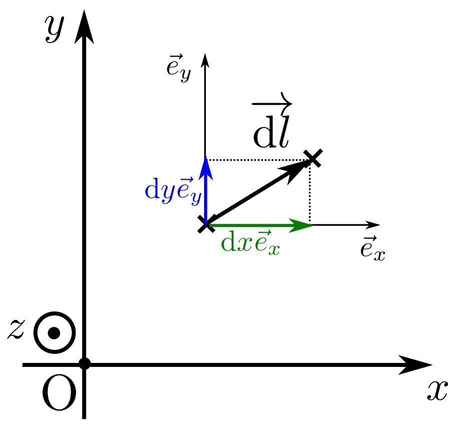
Les coordonnées du point M sont $x(t)$, $y(t)$.

$\leadsto_6$ On suppose d'abord que seule la coordonnée x varie : elle passe de x à $x + \mathrm{d}x$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

$\leadsto_7$ Puis on suppose que seule la coordonnée y varie : elle passe de y à $y + \mathrm{d}y$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les deux : (x,y) devient $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$; il suffit de sommer les deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ trouvés précédemment.

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y.}$



On généralise au cas à 3D : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z.}$

Cette expression en coordonnées cartésiennes est à connaître par cœur.

Vecteur vitesse

$\leadsto_8$À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

b/ En coordonnées polaires

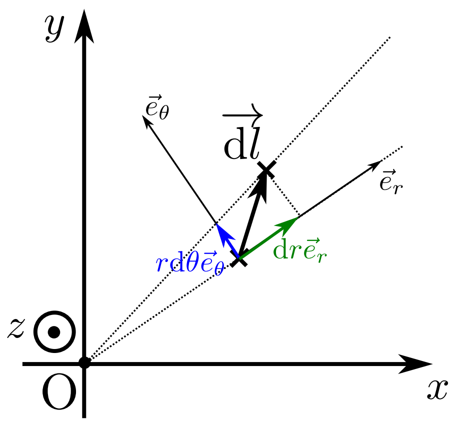
C'est le même principe, mais cette fois les coordonnées du point M sont $r(t)$ et $\theta(t)$.

$\rightsquigarrow_9$ On suppose d'abord que seule la coordonnée r varie : elle passe de r à $r + \mathrm{d}r$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

$\rightsquigarrow_{10}$ Puis on suppose que seule la coordonnée θ varie : elle passe de θ à $\theta + \mathrm{d}\theta$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les deux : (r,θ) devient $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta)$; il suffit de sommer les deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ trouvés précédemment.

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta.}$$



Remarque : On voit sur le schéma ci-dessus qu'on aurait pu donner l'expression $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + (r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$.
Mais ceci s'écrit en développant $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$, et le terme en $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ est un infiniment petit d'ordre 2, qui est négligeable devant les autres. On trouve donc bien la même chose.

Vecteur vitesse

$\rightsquigarrow_{11}$À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées polaires.

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\theta$$

4 – Cas du mouvement circulaire

a/ Définitions

Définitions

- Mouvement circulaire : mouvement pour lequel la trajectoire décrit un cercle.

→ Pour étudier ce type de mouvement, il est judicieux de choisir un repère polaire dont le centre O est le centre du cercle.
→ La coordonnée radiale $r(t)$ est alors constante, égale au rayon R du cercle : $r(t) = R$.

Vitesse angulaire

On définit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (unité SI : rad/s).
On la note souvent ω. On a donc $\omega(t) = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

Uniforme ou non uniforme

- Mouvement circulaire uniforme : la norme du vecteur vitesse est constante.
  De façon équivalente, la vitesse angulaire est constante.
- Mouvement circulaire non uniforme : la norme du vecteur vitesse peut varier.

b/ Cas uniforme

$\rightsquigarrow_{12}$ Dans le cas du mouvement circulaire *uniforme*, le vecteur vitesse est-il constant ? Le vecteur accélération est-il nul ?
$\vec{v}$ n'est pas constant (sa norme l'est, mais la direction du vecteur change). Donc $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \neq \vec{0}$.

$\rightsquigarrow_{13}$ Étude du mouvement circulaire uniforme : faire l'**EC3**.

> **Bilan de l'exercice :**
> On a $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$, puis en dérivant : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
> Comme $\vec{v}$ est uniquement sur $\vec{e}_\theta$, on note souvent v sa composante selon ce vecteur : $\vec{v} = v\vec{e}_\theta$. Donc $v = R\dot{\theta}$.
> En dérivant encore : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R}\vec{e}_r$.
> (Ces expressions ne sont pas à connaître par cœur, mais à savoir retrouver très rapidement.)

- On remarque que le vecteur accélération pointe vers le centre du cercle. Sa norme est proportionnelle à la vitesse au carré, et inversement proportionnelle au rayon de la trajectoire.
- L'accélération est dirigé vers la concavité de la trajectoire. C'est une propriété générale des trajectoires courbes :

Propriétés cinématiques générales

– Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.
– Si la trajectoire est courbe, alors le vecteur accélération est dirigé du côté de la concavité de la trajectoire.

c/ Cas non uniforme

Dans ce cas, la coordonnée $r(t) = R$ reste constante, mais la vitesse angulaire peut varier dans le temps :

$$\omega(t) = \dot{\theta} \neq \text{cst} \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta} \neq 0.$$

$\rightsquigarrow_{14}$ Reprendre l'**EC3** mais dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme. En particulier exprimer le vecteur accélération.
1/ schéma
2/

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$$

avec R constant.

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta$$

donc $\dot{\theta} = v/R$ (idem cas uniforme).

$$\begin{aligned}\vec{a} &= R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r \\ &= R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{R}\vec{e}_\theta - R\frac{v^2}{R^2}\vec{e}_r \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.\end{aligned}$$

Commentaires :

- Composante normale à la trajectoire (appelée aussi composante radiale) : $-\dfrac{v^2}{R}\vec{e}_r$, idem cas uniforme
- Composante tangentielle à la trajectoire : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$

II – Coordonnées cylindriques

1 – Description des coordonnées

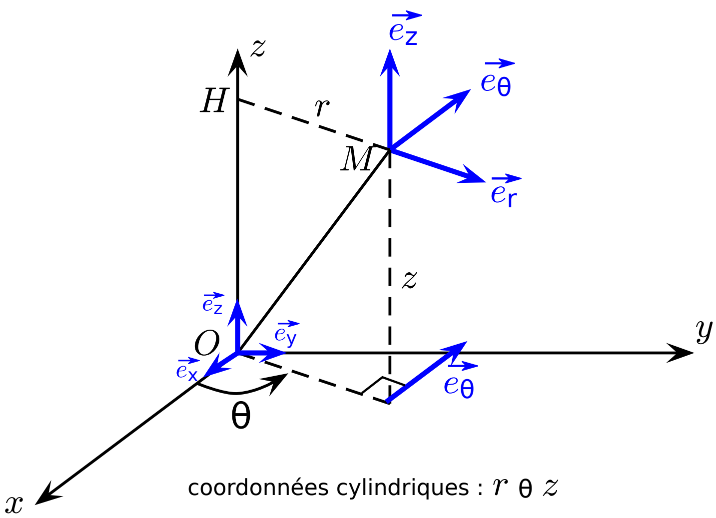
Les coordonnées cylindriques sont une généralisation à 3D des coordonnées polaires. Elles étendent ces dernières à une troisième dimension : la hauteur selon un axe z.

Repérage et définitions :

- Un point M est repéré par trois coordonnées : les distances r et z, et l'angle θ.

  r et θ ont les mêmes rôles qu'en coordonnées polaires. $r = HM$ est la distance à l'axe Oz, et θ est l'angle entre HM et l'axe des x.

  z est la hauteur du point M par rapport au plan xOy.



coordonnées cylindriques : r θ z

- $r \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$.

$\rightsquigarrow_{15}$ Quelle est l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées cylindriques et des vecteurs de la base cylindriques ?

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} &= \dot{\theta}\vec{e}_\theta,\\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\theta}\vec{e}_r,\\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} &= 0.\end{aligned}}$$

Il faut connaître par cœur ce résultat.

Démonstration :
Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont les mêmes qu'en coordonnées polaires, la démonstration est donc la même.

$\rightsquigarrow_{16}$ À partir de là, il faut être capable de retrouver les expressions de $\vec{v}$, $\vec{a}$. Pour voir comment, faire l'**EC2bis**.

Bilan en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

(les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont pas à connaître par cœur, mais à retrouver rapidement à partir de $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ que l'on dérive, comme dans l'EC)

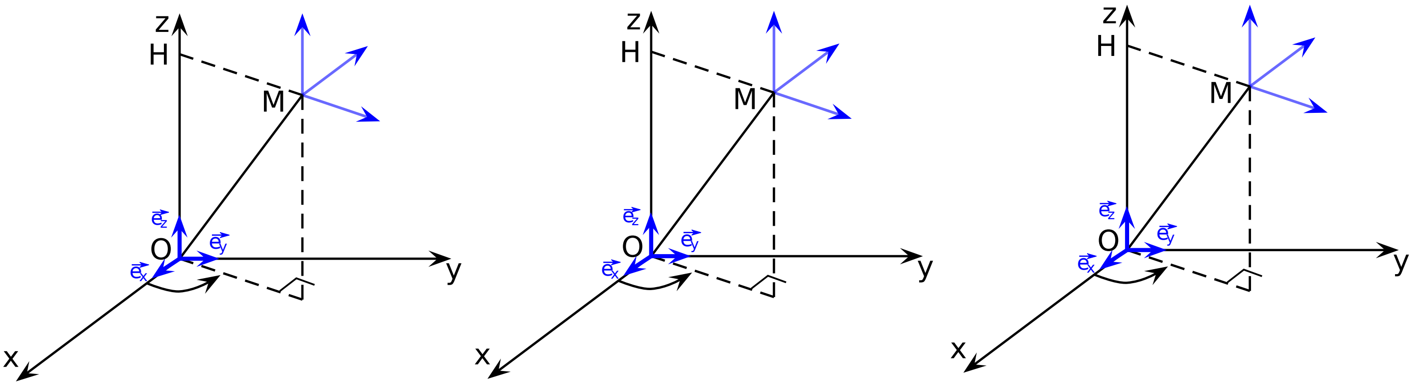
3 – Déplacement élémentaire

Les coordonnées du point M sont $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$. Le principe est donc le même que pour les coordonnées polaires, mais on ajoute en plus une possibilité de modifier la coordonnée z.

$\rightsquigarrow_{17}$ On suppose d'abord que seule la coordonnée r varie : elle passe de r à $r + \mathrm{d}r$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

$\rightsquigarrow_{18}$ Puis on suppose que seule la coordonnée θ varie : elle passe de θ à $\theta + \mathrm{d}\theta$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

$\rightsquigarrow_{19}$ Puis on suppose que seule la coordonnée z varie : elle passe de z à $z + \mathrm{d}z$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)



Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les trois : (r,θ,z) devient $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, z + \mathrm{d}z)$; il suffit de sommer les trois vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ trouvés précédemment.

$\rightsquigarrow_{20}$ On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$.

Vecteur vitesse

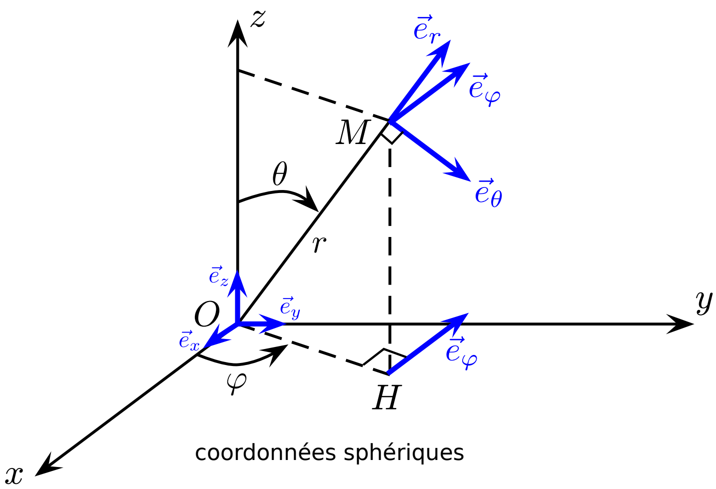
$\rightsquigarrow_{21}$À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées cylindriques.

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_z$$

III – Coordonnées sphériques

1 – Description des coordonnées

Les coordonnées sphériques sont appropriées pour le description d'un problème possédant certaines symétries sphériques.



coordonnées sphériques

- Un point M est repéré par trois coordonnées : la distance r, et les deux angles θ et φ.

  Attention : r, θ, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques ou polaires.

  Ici $r = OM$ est la distance à l'origine, θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe Oz, et φ est l'angle entre $\overrightarrow{HM}$ et l'axe Ox.
- $r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$.

$\rightsquigarrow_{22}$ Quelle est l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées sphériques et des vecteurs de la base sphérique ?

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base : attention, comme les vecteurs ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques, on n'a *pas* les résultats précédents. Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \neq \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \neq -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

Les expressions de ces dérivées étant un peu complexes, on passe plutôt par le calcul du déplacement élémentaire.

Remarque : On peut montrer par projections que l'on a : $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$, $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta\,(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$, $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$.

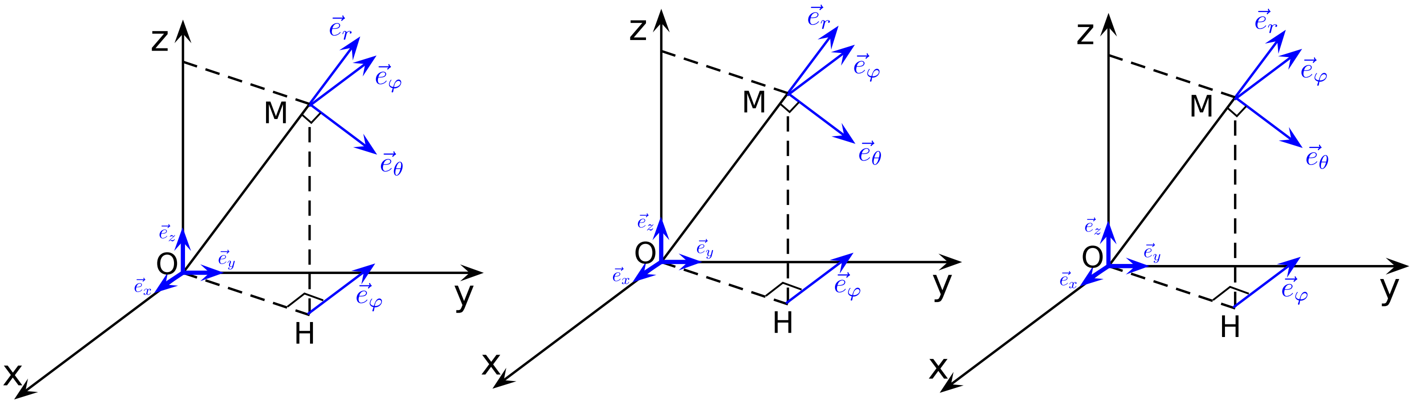
3 – Déplacement élémentaire

Les coordonnées du point M sont $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$.

$\rightsquigarrow_{23}$ On suppose d'abord que seule la coordonnée r varie : elle passe de r à $r + \mathrm{d}r$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

$\rightsquigarrow_{24}$ Puis on suppose que seule la coordonnée θ varie : elle passe de θ à $\theta + \mathrm{d}\theta$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

$\rightsquigarrow_{25}$ Puis on suppose que seule la coordonnée φ varie : elle passe de φ à $\varphi + \mathrm{d}\varphi$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)



Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les trois : (r,θ,z) devient $(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,z+\mathrm{d}z)$; il suffit de sommer les deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ trouvés précédemment.

$\rightsquigarrow_{26}$ On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$.

Vecteur vitesse

$\rightsquigarrow_{27}$À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées sphériques.

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi$$

Vecteur accélération

Il suffit de dériver le vecteur vitesse $\vec{v}$ ci-dessus. Dans le cas général l'expression est assez longue.

IV – Application : le pendule simple

Pour finir, nous nous intéressons à un problème de dynamique (étude d'un mouvement incluant l'influence des forces sur la trajectoires) qui se traite facilement en coordonnées polaires.

a/ Établir l'équation du mouvement, approximation linéaire

$\rightsquigarrow_{28}$ Faire l'**EC4** sur le pendule simple.

b/ Équation du portrait de phase

Nous avons vu avec l'exercice précédent que, dans le cadre de l'approximation linéaire ($\sin\theta \sim \theta$ aux angles petits), l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

Il est possible à partir de ceci de trouver l'équation de la trajectoire dans le portrait de phase (l'équation reliant $\dot{\theta}$ et θ).

$\rightsquigarrow_{29}$ Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, puis la mettre sous la forme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(...) = 0$. En déduire alors une équation reliant $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$. Puis tracer cette trajectoire dans le portrait de phase.