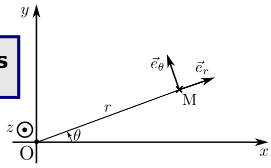
Mécanique
Chapitre 2

Mouvements en coordonnées non cartésiennes

I Coordonnées polaires

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \longrightarrow \vec{v}$ et $\vec{a}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

3 - Déplacement élémentaire

$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$ à connaître

$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$ à savoir retrouver (schéma)

$\longrightarrow$ on en déduit $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t}$

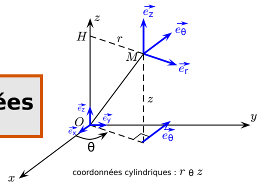
4 - Cas du mouvement circulaire

- uniforme ou non
- savoir trouver la vitesse et l'accélération

5 - Repère de Fresnel

II Coordonnées cylindriques

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \longrightarrow \vec{v}$ et $\vec{a}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

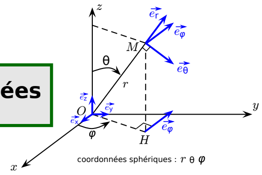
$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

3 - Déplacement élémentaire

$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$ à savoir retrouver (schéma)

III Coordonnées sphériques

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et pour $\vec{v}$ et $\vec{a}$

3 - Déplacement élémentaire

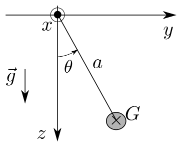
à savoir retrouver (schéma)

↑ **Cinématique** (étude du mouvement sans s'intéresser à ses causes)

↓ **Dynamique** (étude du mouvement provoqué par l'action des forces)

IV Application : le pendule simple

Équation du mouvement
Approximation linéaire
Résolution



Ce qu'il faut connaître

(cours : I)

▶1 Réaliser un schéma avec les coordonnées polaires. Comment s'exprime $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont les coordonnées d'un point M ? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées ?

▶2 Comment s'expriment $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$?

▶3 Quelle est la définition d'un mouvement circulaire uniforme ? Et circulaire non uniforme ?

▶4 Pour une trajectoire plane, vers quel lieu le vecteur accélération pointe-t-il ?

(cours : II)

▶5 Réaliser un schéma avec les coordonnées cylindriques. Comment s'exprime $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont les coordonnées d'un point M ? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées ?

▶6 Comment s'expriment $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$?

(cours : III)

▶7 Réaliser un schéma avec les coordonnées sphériques (faisant apparaître les vecteurs de la base locale). Comment s'exprime $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont les coordonnées d'un point M ? Quels sont les domaines de variation de ces coordonnées ?

Ce qu'il faut savoir faire

(cours : I et II)

▶8 Établir les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère polaire (cours partie I) ou cylindrique (cours partie II). → **EC2**, **EC2bis**

▶9 Exprimer à partir d'un schéma l'expression du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ en coordonnées cartésiennes, polaires ou cylindriques. En déduire l'expression du vecteur vitesse. cours I.3 et II.3

▶10 Cas particulier du mouvement circulaire (uniforme ou non) : savoir retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération ; identifier les liens entre rayon de la trajectoire, norme de la vitesse, sa dérivée, et les composantes de l'accélération. → **EC3**, TD II

(cours : IV)

▶11 Savoir mener l'étude du pendule simple à l'aide du principe fondamental de la dynamique (en coordonnées polaires) : établir l'équation du mouvement, faire l'approximation linéaire pour se ramener au cadre de l'oscillateur harmonique, résoudre l'équation. → **EC4**

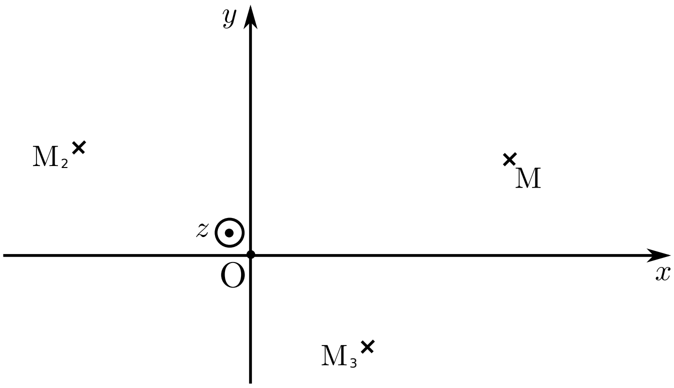
Exercices de cours

Exercice C1 – Coordonnées polaires

1 - Pour chaque point M du schéma, dessiner les vecteurs de la base $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

2 - Quelle est l'expression du vecteur position en fonction des vecteurs de la base polaire et des coordonnées polaires ?

3 - Établir l'expression des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et θ.

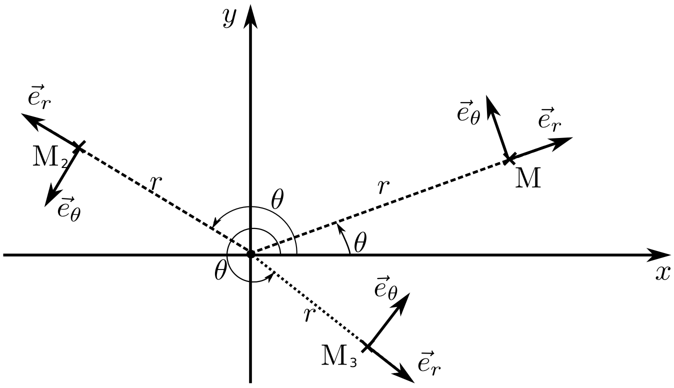


Correction

1 - Cf ci-contre.

2 - On a toujours $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.

3 - Faire un schéma pour voir les projections.
On obtient $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$
et $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$.



Exercice C2 – Coordonnées polaires : vitesse et accélération

On se place dans un repère en coordonnées cartésiennes à deux dimensions (dans un plan).

1 - Faire un schéma du repère. Placer un point M.

2 - Donner les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$.

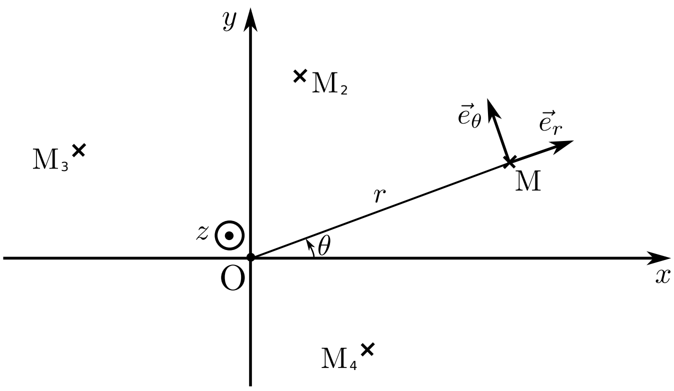
On ajoute un repère en coordonnées polaires.

3 - Faire apparaître les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ au point M, la distance r et l'angle θ.

4 - D'après le cours, que valent les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$?

5 - En déduire les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le repère polaire.

Correction



1 - Cf ci-contre.

2 -
- position $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$,
- vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$,
- accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$.

3 - Cf ci-contre.

4 - $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

5 - On part de $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ et on dérive pour avoir

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}r\,\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \\
&= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \\
&\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.}
\end{aligned}$$

Pour avoir l'accélération on dérive à nouveau :

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\dot{r}\,\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r \\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r \\
&\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.}
\end{aligned}$$

Exercice C2bis – Coordonnées cylindriques : vitesse et accélération

On se place dans un repère en coordonnées cylindriques.

1 - Faire un schéma permettant de représenter ces coordonnées. En particulier faire apparaître les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ au point M, les distances r et z, et l'angle θ.

2 - Que valent les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}$?

3 - En déduire les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le repère cylindrique.

Correction

1 - Cf schéma du cours.

2 - $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = 0$.

3 - On part de $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z}$ et on dérive pour avoir

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}r\,\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{z}\,\vec{e}_z \\
&= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{z}\,\vec{e}_z \\
&\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z.}
\end{aligned}$$

Pour avoir l'accélération on dérive à nouveau :

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\dot{r}\,\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} \\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r + \ddot{z}\,\vec{e}_z \\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ddot{z}\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z.}$$

Exercice C3 – Mouvement circulaire uniforme

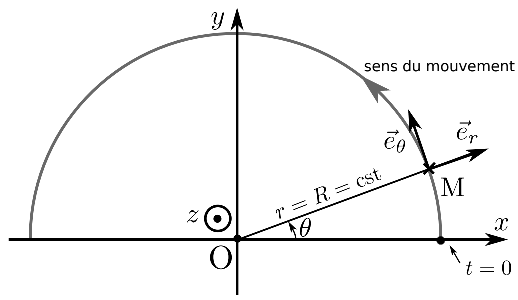
On considère un point M en mouvement circulaire uniforme, de rayon R, autour d'un centre O.

1 - Choisir un repère adapté à l'étude du problème. Faire un schéma.

2 - Exprimer le vecteur position, vitesse et accélération dans le repère de coordonnées polaires.

3 - Exprimer le vecteur accélération en fonction de $\|\vec{v}\|$, R et $\vec{e}_r$ seulement.

Correction



1 - Cf ci-contre : repère dont le centre O est le centre du cercle.

2 - Avec ce choix de repère, la coordonnée $r(t) = R$ est constante.

On a $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = R\vec{e}_r.}$

En dérivant : $\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta.}$

En dérivant : $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

Mais attention, le mouvement est uniforme, donc $\|\vec{v}\| = \text{cst}$. Or $\|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}|$. Donc $\dot{\theta} = \text{cst}$. Donc $\ddot{\theta} = 0$.

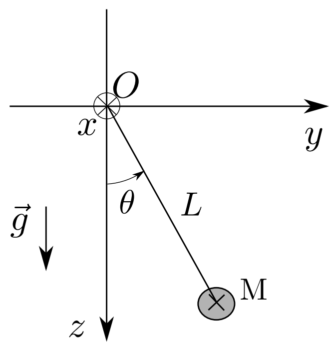
On a donc $\boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.}$

3 - On a vu que $\|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}|$, donc $|\dot{\theta}| = \dfrac{\|\vec{v}\|}{R}$ et donc $\dot{\theta}^2 = \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R^2}$.

On a donc $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -R\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R^2}\vec{e}_r$, soit $\boxed{\vec{a} = -\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R}\vec{e}_r.}$

Exercice C4 – Pendule simple

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note L sa longueur. On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ constante.



1 - Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires. Faire de même pour la vitesse et l'accélération du point M.

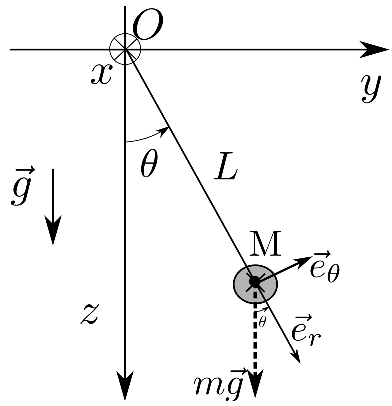
2 - Faire un bilan des forces. À l'aide du PFD, en déduire une équation différentielle portant sur $\theta(t)$ uniquement.

3 - Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre. On supposera qu'à $t = 0$ le pendule est en $\theta = 0$ et qu'on lui communique une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$.

4 - Que vaut la période des oscillations pour une masse de $1{,}0\,\mathrm{kg}$ et un fil de longueur $1{,}0\,\mathrm{m}$?

Remarque : le résultat de la dernière question n'est pas un hasard, mais une conséquence de la définition historique du mètre.

Correction



1 - $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = L\vec{e}_r.}$

En dérivant : $\boxed{\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta.}$

En dérivant : $\vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$

2 - Bilan des forces :

- Tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e}_r$.
- Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$.

PFD sur la masse M :

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}, \quad \text{soit} \quad m(L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = -T\,\vec{e}_r + mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta).$$

On ne connait pas T, donc on projette sur $\vec{e}_\theta$. Il reste alors :

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.}$$

3 - On suppose que les oscillations sont de faible amplitude : $\theta(t) \ll 1\,\text{rad}$. On a alors $\sin\theta \simeq \theta$. L'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.}$$

Équation de type oscillateur harmonique. Solution particulière nulle, donc solution générale = solution de l'équation homogène :

$$\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Avec $\theta(0) = 0$ on obtient $A = 0$.
Avec $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ on obtient $\omega_0 B = \dot{\theta}_0$, donc $B = \dot{\theta}_0/\omega_0$.

Finalement : $\boxed{\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t.}$

4 - Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} = 2{,}006\,\text{s}$

Cours

I – Coordonnées polaires

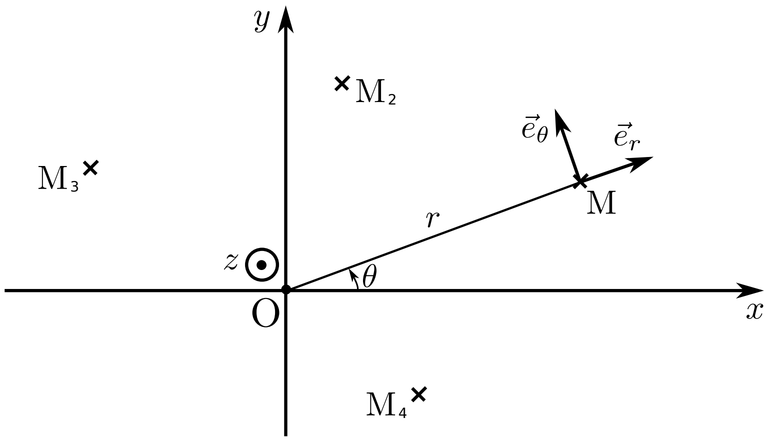
1 – Description des coordonnées

a/ Rappel sur les coordonnées cartésiennes dans un plan

- point M repéré par ses coordonnées x et y,
- vecteurs de la base $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$,
- position $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$,
- vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$,
- accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$.

b/ Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires permettent de repérer un mouvement dans un plan, et sont appropriées dans le cas de mouvements circulaires, elliptiques, etc.



Repérage et définitions :

- Un point M est repéré par deux coordonnées : la distance r et l'angle θ.
  On a $OM = r$, et θ est l'angle entre OM et l'axe des x.
- $r \geq 0$ et $\theta \in [0{,}2\pi]$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$.

Attention : La base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ est une base locale, elle varie en fonction du point M.
Ces deux vecteurs *ne sont donc pas constants.*
En revanche ils sont bien de norme 1, sont orthogonaux entre eux et forment une base directe.

$\leadsto_1$ Compléter le schéma ci-dessus en faisant apparaître, pour chaque point M, les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, la distance r et l'angle θ.

$\leadsto_2$ Quelle est l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées polaires et des vecteurs de la base polaire ?

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Pour réviser tout ceci : **EC1**.

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} &= \dot{\theta}\vec{e}_\theta,\\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\theta}\vec{e}_r,\end{aligned}}$$

Il faut connaître par cœur ce résultat.

$\leadsto_3$ **Démonstration :** (à faire sur feuille) a/ Exprimer $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base cartésienne. b/ Dériver par rapport au temps.

$\leadsto_4$ À partir de là, il faut être capable de trouver les expressions de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$. Pour voir comment, faire l'**EC2**. Les résultats sont dans l'encadré qui suit.

Bilan en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

(les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont pas à connaître par cœur, mais à retrouver rapidement à partir de $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ que l'on dérive, comme dans l'EC2)

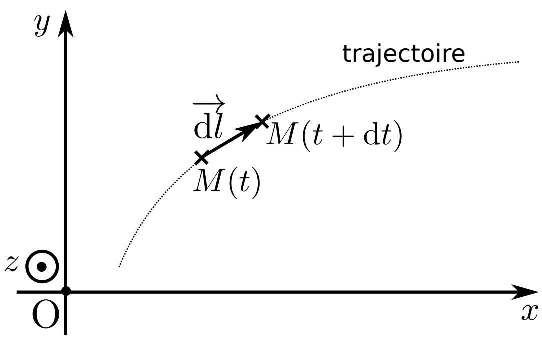
Remarque : on peut utiliser la notation $\vec{v} = v_r\,\vec{e}_r + v_\theta\,\vec{e}_\theta$, avec v_r la composante de $\vec{v}$ selon $\vec{e}_r$ et v_θ la composante selon $\vec{e}_\theta$. On a donc ici $v_r = \dot{r}$ et $v_\theta = r\dot{\theta}$.

De même pour $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$.

3 – Déplacement élémentaire

On considère un instant t, et un instant $t + \mathrm{d}t$ très proche ($\mathrm{d}t$ est une durée très courte, dite *infinitésimale*).

- Instant t : le point M est en $M(t)$.
- Instant $t + \mathrm{d}t$: le point M est en $M(t + \mathrm{d}t)$.



On définit le déplacement élémentaire $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}.}$

La vitesse du point M au temps t (appelée aussi vitesse instantanée) est alors : $\boxed{\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t}.}$

$\rightarrow$ le calcul du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ permet d'obtenir l'expression de $\vec{v}$. C'est une seconde méthode pour obtenir $\vec{v}$.

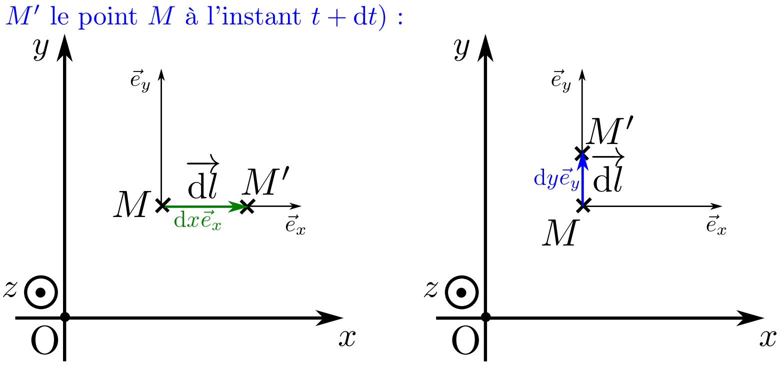
a/ En coordonnées cartésiennes dans un plan

Les coordonnées du point M sont $x(t)$, $y(t)$.

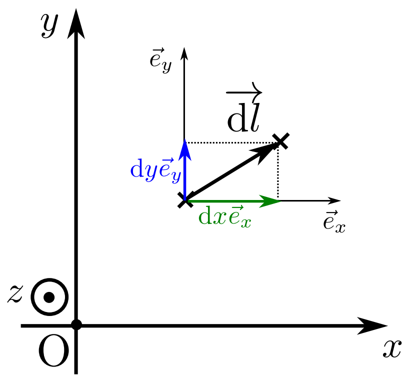
$\rightsquigarrow_5$ On suppose d'abord que seule la coordonnée x varie : elle passe de x à $x + \mathrm{d}x$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

$\rightsquigarrow_6$ Puis on suppose que seule la coordonnée y varie : elle passe de y à $y + \mathrm{d}y$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

Correction (on a noté M' le point M à l'instant $t + \mathrm{d}t$) :



Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les deux : (x,y) devient $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$; il suffit de sommer les deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ trouvés précédemment : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y.}$



On généralise au cas à 3D :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z.}$$

Cette expression en coordonnées cartésiennes est à connaître par cœur.

Vecteur vitesse

$\rightsquigarrow_7$ À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

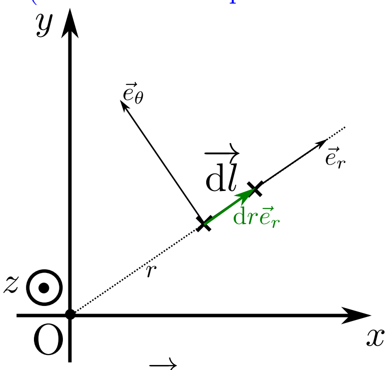
b/ En coordonnées polaires

C'est le même principe, mais cette fois les coordonnées du point M sont $r(t)$ et $\theta(t)$.

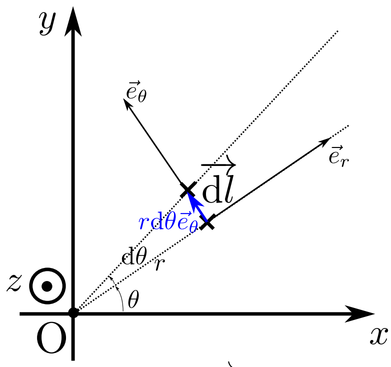
$\rightsquigarrow_8$ On suppose d'abord que seule la coordonnée r varie : elle passe de r à $r + \mathrm{d}r$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

$\rightsquigarrow_9$ Puis on suppose que seule la coordonnée θ varie : elle passe de θ à $\theta + \mathrm{d}\theta$. Que vaut alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$? (faire un schéma)

Correction (on a noté M' le point M à l'instant $t + \mathrm{d}t$) :



$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r$



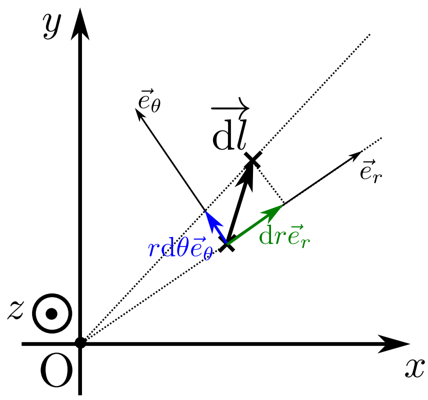
$\mathrm{d}\theta \simeq \tan \mathrm{d}\theta = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{d}l}\|}{r}$ donc $\|\overrightarrow{\mathrm{d}l}\| = r\mathrm{d}\theta$

et $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ est selon $\vec{e}_\theta$

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{d}l} = r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les deux : (r,θ) devient $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta)$; il suffit de sommer les deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ trouvés précédemment.

$\rightsquigarrow_{10}$ $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta.}$



Remarque : On voit sur le schéma ci-dessus qu'on aurait pu donner l'expression $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + (r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$.
Mais ceci s'écrit en développant $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$, et le terme en $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ est un infiniment petit d'ordre 2, qui est négligeable devant les autres. On trouve donc bien la même chose.

Vecteur vitesse

$\rightsquigarrow_{11}$À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées polaires.

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\theta$$

4 – Cas du mouvement circulaire

a/ Définitions

Définitions

- Mouvement circulaire : mouvement pour lequel la trajectoire décrit un cercle.

→ Pour étudier ce type de mouvement, il est judicieux de choisir un repère polaire dont le centre O est le centre du cercle.
→ La coordonnée radiale $r(t)$ est alors constante, égale au rayon R du cercle : $r(t) = R$.

Vitesse angulaire

On définit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (unité SI : rad/s).
On la note souvent ω. On a donc $\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

Remarque : si $\omega = \dot{\theta} > 0$, alors le point M tourne dans le sens direct autour de O (θ croissant) ;
et si $\omega = \dot{\theta} < 0$, alors le point M tourne dans le sens indirect autour de O (θ décroissant).

Uniforme ou non uniforme

- Mouvement circulaire uniforme : la norme $\|\vec{v}\|$ du vecteur vitesse est constante.
  De façon équivalente, la vitesse angulaire ω est constante.
- Mouvement circulaire non uniforme : la norme du vecteur vitesse peut varier.

b/ Cas uniforme

$\rightsquigarrow_{12}$ Dans le cas du mouvement circulaire *uniforme*, le vecteur vitesse est-il constant ? Le vecteur accélération est-il nul ?
$\vec{v}$ n'est pas constant (sa norme l'est, mais la direction du vecteur change). Donc $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \neq \vec{0}$.

$\rightsquigarrow_{13}$ Étude du mouvement circulaire uniforme : faire l'**EC3**.

- On remarque que le vecteur accélération pointe vers le centre du cercle. Sa norme est proportionnelle à la vitesse au carré, et inversement proportionnelle au rayon de la trajectoire.

c/ Cas non uniforme

Dans ce cas, la coordonnée $r(t) = R$ reste constante, mais la vitesse angulaire peut varier dans le temps :

$$\omega(t) = \dot{\theta} \neq \text{cst} \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta} \neq 0.$$

$\rightsquigarrow_{14}$ Reprendre l'**EC3** mais dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme. On posera $v = R\dot{\theta}$. On exprimera le vecteur accélération en fonction de v et R.
1/ schéma
2/

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$$

avec R constant.

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta.$$

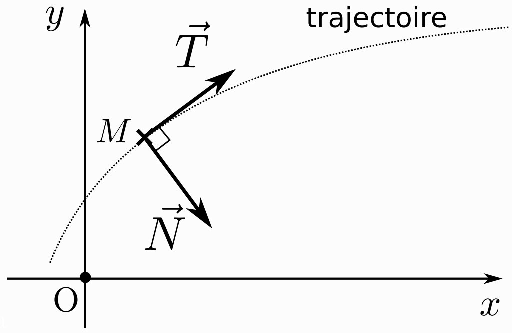
$$\begin{aligned}
\vec{a} &= R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r \\
&= R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{R}\vec{e}_\theta - R\frac{v^2}{R^2}\vec{e}_r \quad \text{(on utilise } \dot{\theta} = v/R\text{)} \\
&= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.
\end{aligned}$$

5 – Base de Frenet

Définition de la base de Frenet

Il s'agit d'une base locale, avec deux vecteurs unitaires (de norme 1). Au point M de la trajectoire :

- le vecteur $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire, dans le sens de $\vec{v}$;
- le vecteur $\vec{N}$ est orthogonal à la trajectoire, orienté vers l'intérieur de la courbe.



On a les **propriétés** suivantes :

- $\vec{v} = \|\vec{v}\|\,\vec{T}$
- $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R(t)}\vec{N}$ avec $R(t)$ le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré (c'est le rayon du cercle qui épouse au mieux la trajectoire).

L'expression de $\vec{a}$ ci-dessus est admise. On voit qu'elle est identique à celle pour le mouvement circulaire (uniforme ou non), et elle le généralise en quelque sorte.

Propriétés cinématiques générales

- Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.
- Si la trajectoire est courbe, alors le vecteur accélération est dirigé du côté de la concavité de la trajectoire.

II – Coordonnées cylindriques

1 – Description des coordonnées

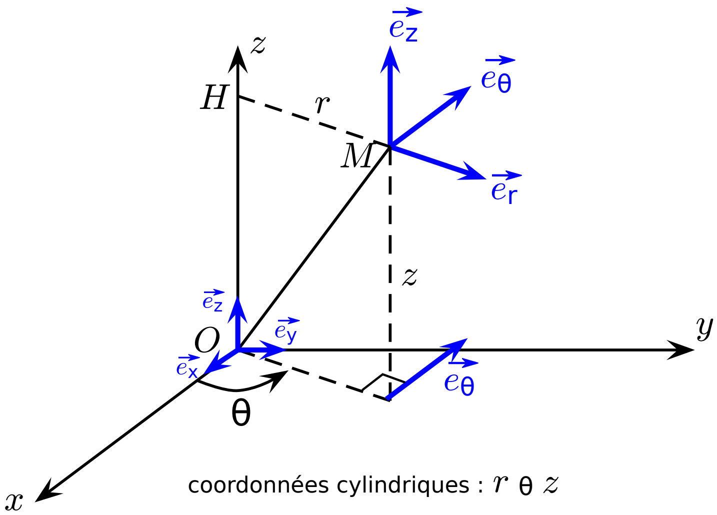
Les coordonnées cylindriques sont une généralisation à 3D des coordonnées polaires. Elles étendent ces dernières à une troisième dimension : la hauteur selon un axe z.

Repérage et définitions :

- Un point M est repéré par trois coordonnées : les distances r et z, et l'angle θ.

  r et θ ont les mêmes rôles qu'en coordonnées polaires. $r = HM$ est la distance à l'axe Oz, et θ est l'angle entre HM et l'axe des x.

  z est la hauteur du point M par rapport au plan xOy.



- $r \geq 0$, $\theta \in [0{,}2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$.

$\rightsquigarrow_{15}$ Quelle est l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées cylindriques et des vecteurs de la base cylindriques ?

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}, \quad \text{soit donc} \quad \boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.}$$

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = 0.}$$

Il faut connaître par cœur ce résultat.

Démonstration : les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont les mêmes qu'en coordonnées polaires, la démonstration est donc la même.

$\rightsquigarrow_{16}$ À partir de là, il faut être capable de retrouver les expressions de $\vec{v}$, $\vec{a}$. Pour voir comment, faire l'**EC2bis**.

Bilan en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

(les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont pas à connaître par cœur, mais à retrouver rapidement à partir de $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ que l'on dérive, comme dans l'EC)

3 – Déplacement élémentaire

Les coordonnées du point M sont $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$. Le principe est donc le même que pour les coordonnées polaires, mais on ajoute en plus une possibilité de modifier la coordonnée z.

- Si la coordonnée r passe de r à $r+\mathrm{d}r$, et la coordonnée θ passe de θ à $\theta+\mathrm{d}\theta$, alors on a le même cas qu'en polaires : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$.
- Puis on suppose que seule la coordonnée z varie : elle passe de z à $z+\mathrm{d}z$. On a alors : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$.

→ Dans le cas général où les coordonnées varient toutes les trois : (r,θ,z) devient $(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,z+\mathrm{d}z)$ on a : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$.

III – Coordonnées sphériques

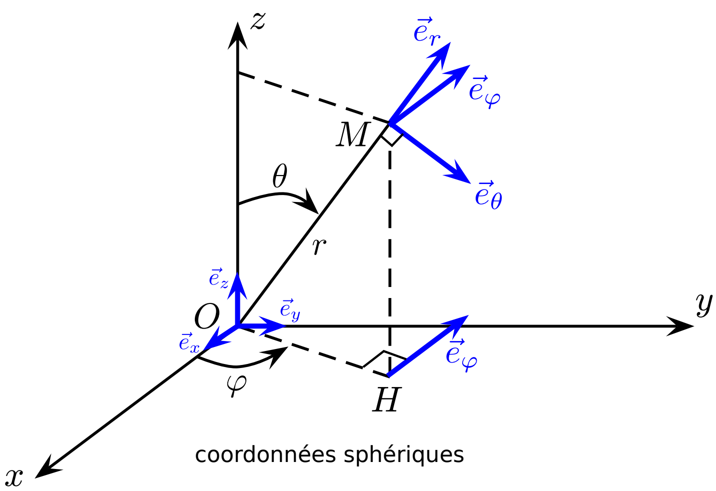
1 – Description des coordonnées

Les coordonnées sphériques sont appropriées pour le description d'un problème possédant certaines symétries sphériques.

- Un point M est repéré par trois coordonnées : la distance r, et les deux angles θ et φ.

  Attention : r, θ, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques ou polaires.

  Ici $r = OM$ est la distance à l'origine, θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe Oz, et φ est l'angle entre $\overrightarrow{OH}$ et l'axe Ox.



coordonnées sphériques

- $r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$.

$\rightsquigarrow_{17}$ Quelle est l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées sphériques et des vecteurs de la base sphérique ?

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base : attention, comme les vecteurs ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques, on n'a *pas* les résultats précédents. Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \neq \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \neq -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

Les expressions de ces dérivées étant un peu complexes, on passe plutôt par le calcul du déplacement élémentaire.

Remarque : On peut montrer par projections que l'on a : $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$, $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta\,(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$, $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$.

3 – Déplacement élémentaire

À partir de l'expression du déplacement élémentaire et de la définition de la vitesse instantanée, on obtient l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées sphériques (pas à connaître) :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi$$

IV – Application : le pendule simple

Pour finir, nous nous intéressons à un problème de dynamique (étude d'un mouvement incluant l'influence des forces sur la trajectoire) qui se traite facilement en coordonnées polaires.

$\rightsquigarrow_{18}$ Faire l'**EC4** sur le pendule simple.