Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 2

Oscillateurs harmoniques

systèmes du second ordre non amortis

I Le système masse-ressort décrit de façon idéale

1 - Description d'un ressort $\boxed{\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}_{\text{ext}}}$

2 - Bilan des forces, PFD

on aboutit à une équation de l'oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$$

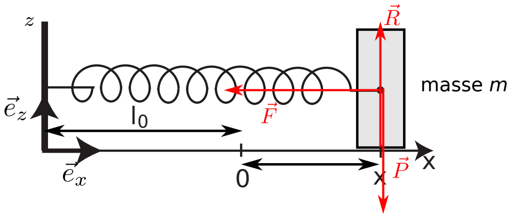
3 - Résolution

$$x(t) = x_{\text{part}} + x_{\text{hom}} \quad \text{solution générale}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{\text{part}} = \ldots \\ x_{\text{hom}} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \end{array} \right.$$

+CI pour déterminer A et B

Tracé de la solution.
Amplitude, pulsation, période, fréquence.



4 - Portrait de phase

5 - Étude énergétique

$$\left| \begin{array}{l} E_{p,\text{ress}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \\ E_{p,\text{pes}} = mgz \\ E_c = \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right. \longrightarrow E_m = E_c + E_{p,\text{ress}} + E_{p,\text{pes}}$$

ppté : $E_m = \text{cst}$ si pas de dissipation

6 - D'autres CI ou repérages

7 - Conclusions sur l'OH

II Étude du circuit LC idéal

TD

III Le système masse-ressort vertical

TD

Ce qu'il faut connaître

——————— (cours : I)

►1 Quelle est l'équation qui caractérise un oscillateur harmonique ?

►2 Comment s'écrivent ses solutions ?

►3 Comment s'écrit la force exercée par un ressort sur un objet accroché à une de ses extrémités ? On fera un schéma.

——————— (cours : I.5 : énergie)

►4 Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

►5 Et celle de l'énergie potentielle associée au ressort ?

►6 Quelle est l'expression de l'énergie cinétique d'une masse m ?

►7 Quelle est l'expression de l'énergie mécanique ? Quelle propriété possède-t-elle si toutes les forces qui travaillent sont conservatives ?

Ce qu'il faut savoir faire

——————— (cours : I)

►8 Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort. → **EC1**

►9 Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données. → **EC2**

►10 Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.

►11 Tracer un portrait de phase. → **EC3**

►12 Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort. → **EC4**

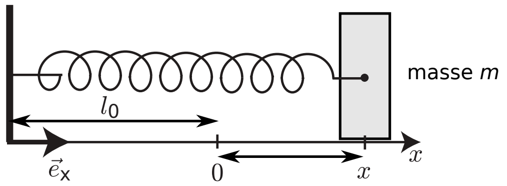
——————— (cours : II, III et de façon générale)

Les savoir faire précédents sont mobilisables dans d'autres situations où la modélisation aboutit à l'équation d'un oscillateur harmonique.

– Exemples : <u>circuit LC</u> (TD), <u>masse-ressort vertical</u> (TD, il faut alors savoir déterminer la position d'équilibre), etc...

Exercices de cours

Exercice C1 – Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort



On considère le système ci-contre. On néglige tout frottement et on se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le PFD, en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$.

Exercice C2 – Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données

On reprend le cas précédent et ses résultats, notamment l'équation satisfaite par $x(t)$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

1 - Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera les constantes d'intégration.

2 - Alternative : Reprendre cette question en supposant cette fois que à $t = 0$, $x(0) = x_0 > 0$ et $v(0) = 0$.

Exercice C3 – Tracer un portrait de phase

On reprend le cas précédent et ses résultats : $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

1 - Tracer le portrait de phase du système.

Exercice C4 – Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort

On reprend le cas de l'EC2 et ses résultats : $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

1 - Donner l'expression de l'énergie mécanique du système {masse et ressort} en fonction de $x(t)$, de $\dot{x}(t)$ et d'autres paramètres.

2 - Dériver par rapport au temps cette expression et montrer que l'énergie mécanique est bien conservée.

3 - Qu'est ce qui permettait de prédire cette conservation sans faire aucun calcul ?

Méthodes

Méthode 1 : Comment obtenir l'équation du mouvement pour un problème de mécanique ?
Revoir la fiche de début du chapitre sur la mécanique (chapitre 1).

Exemple : le I.2 du cours pour le système masse-ressort horizontal.

Méthode 2 : Comment obtenir l'équation la grandeur voulue pour un problème électrique ?
Revoir la fiche de début du chapitre sur l'électronique.

Exemple : le TD sur l'oscillateur LC

Méthode 3 : Comment obtenir les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ?
Équation du type $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$ avec α une constante.

- On écrit la forme générale des solutions : $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t)$, avec
  - x_{part} solution particulière, constante ici, donc $\ddot{x}_{\text{part}} = 0$ et l'équation donne $0 + \omega_0^2 x_{\text{part}} = \alpha$, soit $x_{\text{part}} = \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$. (donc si $\alpha = 0$ alors $x_{\text{part}} = 0$)

– x_{hom} solution de l'équation homogène, $\boxed{x_{\text{hom}}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t}$ (forme à connaître par cœur) avec A et B des constantes à déterminer.

Donc on a

$$\boxed{x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2}.} \tag{1}$$

► On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales. Par exemple supposons que :

$$x(0) = x_0 \quad \text{(CI 1)}$$
$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \text{(CI 2)}$$

On raisonne sur la solution *complète* (équation (1) ci dessus).

– CI 1 : D'après la solution, $x(0) \overset{\text{sol}}{=} A + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$.

  Or $x(0) \overset{\text{CI}}{=} x_0$.
  On en déduit $A + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2} = x_0$, d'où $A =$...

– CI 2 : On calcule $\dot{x}(t) = \left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}\right) = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$.

  Puis on prend la valeur en $t = 0$: $\dot{x}(0) \overset{\text{sol}}{=} B\omega_0$.
  Or $\dot{x}(0) \overset{\text{CI}}{=} v_0$.
  On en déduit $B\omega_0 = v_0$, d'où $B =$...

Méthode 4 : trouver les CI en électricité

► Identifier les condensateurs et bobines.

► Étudier le circuit à $t = 0^-$ (donc à $t < 0$, en général les générateurs sont éteints, etc...).
En déduire $u_{\text{condensateur}}(0^-)$ pour chaque condensateur et $i_{\text{bobine}}(0^-)$ pour chaque bobine.

► On en déduit $u_{\text{condensateur}}(0^+)$ pour chaque condensateur et $i_{\text{bobine}}(0^+)$ pour chaque bobine (ce sont les mêmes qu'à 0^- car $u_{\text{condensateur}}$ et i_{bobine} fonctions contines de t).
Si besoin on en déduit les autres courants et tensions à 0^+ avec la loi des mailles ou des nœuds.

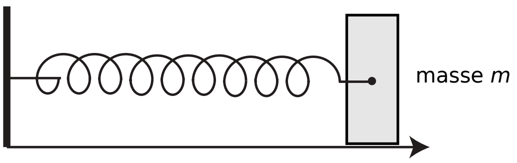
► Si besoin des dérivées à 0^+, attention car elles n'ont pas de raison de valoir la même chose qu'à 0^-.
Utiliser des relations comme $\dfrac{\mathrm{d}u_{\text{condensateur}}}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i_{\text{condensateur}}(0^+)}{C}$ (avec $i_{\text{condensateur}}(0^+)$ déterminé à l'étape précédente) ;
ou $\dfrac{\mathrm{d}i_{\text{bobine}}}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{u_{\text{bobine}}(0^+)}{L}$ (avec $u_{\text{bobine}}(0^+)$ déterminé à l'étape précédente).

Exemple : le TD sur l'oscillateur LC

Morceaux du cours

I – Le système masse-ressort décrit de façon idéale (sans frottements)

Dans toute la partie I, nous étudions l'exemple du système masse-ressort horizontal :



– La masse m glisse sur un plan.

– À l'équilibre, le ressort n'est ni étiré ni comprimé → on note l_0 sa longueur à vide (donc au repos).

– À $t = 0$ le ressort est à l'équilibre, et on donne une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ à la masse.

Hypothèses :

– On néglige tout frottement. – Masse ponctuelle. – Référentiel d'étude galiléen.

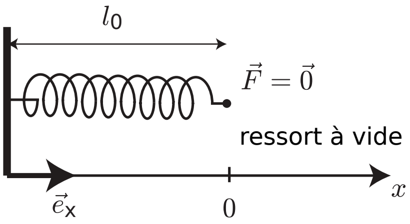
1 – Description d'un ressort

Modèle simplifié du ressort à spires (non jointives), de masse négligeable. Notations :

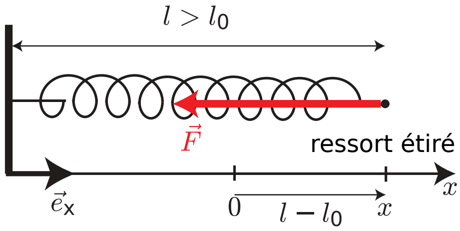
– Longueur à vide : l_0. – Longueur totale : l.

– L'allongement du ressort est par définition : $\Delta l = l - l_0$.

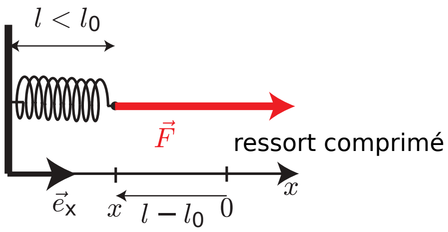
Action du ressort :



– Si $l = l_0$, pas de force.



– Si $l > l_0$, ressort étiré, force qui rappelle M vers le point d'attache.



– Si $l < l_0$, ressort comprimé, force qui pousse M.

Force exercée par un ressort

La force exercée sur un point M accroché à l'extrémité est proportionnelle à l'allongement $\Delta l = l - l_0$ du ressort :

$$\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\,\vec{u}_{\text{ext}},}$$

avec $\vec{u}_{\text{ext}}$ le vecteur unitaire dirigé du point d'attache vers la masse M.

4 – Portrait de phase

⋆ Lien vers une animation permettant de tracer le portrait de phase :
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort.php
Prendre $\lambda = 0$ pour ne pas avoir d'amortissement et obtenir l'équation de l'oscillateur harmonique du cours.

5 – Étude énergétique

Notions sur l'énergie en mécanique

Énergie mécanique d'un système :

$$E_m = \underbrace{E_c}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{E_p}_{\text{énergie potentielle}} .$$

Théorème : en l'absence de frottement, l'énergie mécanique est constante, $E_m = \text{cst}$.
On a alors $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

Expressions des énergies

– Énergie cinétique : $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$

– Énergie potentielle : une par force, $E_p = E_{p,\text{pes}} + E_{p\text{ressort}}$,

– $E_{p,\text{pes}} = \pm mgz$ énergie potentielle de pesanteur.
Signe + si l'axe z est vers le haut, signe − si l'axe z est vers le bas.

– $\boxed{E_{p\text{ressort}} = \dfrac{1}{2}k(l - l_0)^2}$ énergie potentielle élastique du ressort.