Partie V : Électromagnétisme
Chapitre 1

DM 15 – Capacité d'un câble coaxial

Le câble coaxial est utilisé pour transmettre de l'information, par exemple entre une antenne et une télévision, ou encore vers certains modems internet. C'est également ce type de câble qui permet de réaliser des mesures à l'oscilloscope.

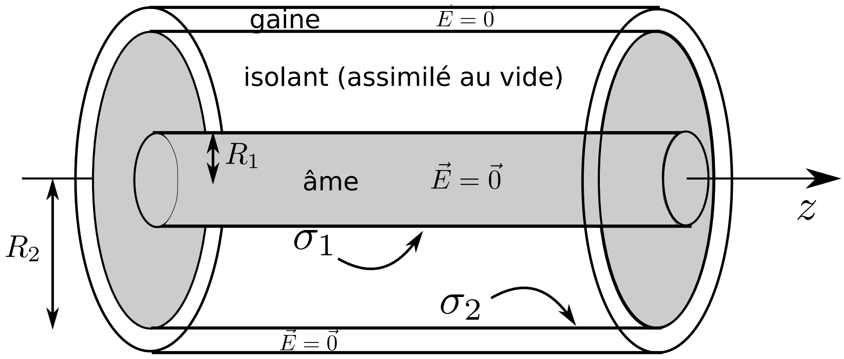
Un câble coaxial est constitué de deux cylindres conducteurs concentriques. Le cylindre intérieur est appelé l'âme (rayon R_1), et le cylindre extérieur la gaine (rayon R_2). Entre les deux se trouve un matériau isolant, de permittivité diélectrique que l'on prendra égale à celle du vide : $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$.

Il s'agit donc de deux conducteurs en regard l'un de l'autre, tout comme dans le modèle du condensateur vu en cours. Le câble se comporte donc (en partie) comme un condensateur.

On se place en régime stationnaire. On admet que la densité de charge à l'intérieur de l'âme est nulle, sauf à sa surface, où il y a présence d'une densité surfacique de charges σ_1. De même, à l'intérieur de la gaine la densité de charge est nulle, sauf à sa surface où il y a présence d'une densité surfacique de charges σ_2.

On considère une longueur L de câble, avec $L \gg R_1,\ R_2$ ce qui revient à considérer le câble de longueur infinie (à négliger les effets de bords). On note z la direction le long du câble.

L'objectif est d'aboutir à une expression du champ électrique dans l'espace entre la gaine et l'âme ($R_1 < r < R_2$).



1 - En régime stationnaire, la charge totale présente sur l'âme est l'opposée de la charge totale présente sur la gaine. En déduire la relation $R_1\sigma_1 = -R_2\sigma_2$.

2 - En étudiant les symétries et les invariances de la distribution de charges, montrer que l'on peut écrire $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$, avec $\vec{e}_r$ le vecteur radial des coordonnées cylindriques d'axe z.

On justifiera soigneusement. On distinguera bien les deux étapes (symétries, et invariances).

3 - Sur une vue en coupe dans un plan orthogonal à l'axe z, schématiser quelques lignes de champ et quelques équipotentielles. On supposera que l'armature interne porte une charge positive.

4 - En appliquant le théorème de Gauss à une surface bien choisie, déterminer l'expression du champ $\vec{E}$ pour r compris entre R_1 et R_2.

5 - En déduire l'expression de la différence de potentiel U entre l'âme et la gaine : $U = V(R_1) - V(R_2)$, en fonction des deux rayons, de σ_1 et de ϵ_0.

6 - La capacité d'un condensateur est définie par la relation $C = \dfrac{Q}{U}$ (qui est celle utilisée en électronique), avec Q la charge portée par l'armature positive.

Donner l'expression de C en fonction de ϵ_0, L, R_1 et R_2.

7 - Définir la capacité linéique (par unité de longueur) du câble. Donner sa valeur pour $R_1 = 1.0\,\mathrm{mm}$ et $R_2 = 2.5\,\mathrm{mm}$.