

I Rail gun [● ○ ○]

1 - On choisit un axe Ox de gauche à droite.

- a - On exprime $\vec{F} = I \vec{BA} \wedge \vec{B}_0 = IlB_0 \vec{e}_x$ (axe x orienté vers la droite sur la figure).
Le travail d'une force constante (c'est le cas ici) sur une distance d est

$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd = IlB_0d.$$

b - On utilise le théorème de l'énergie cinétique : $E_c(f) - E_c(i) = W(\vec{F})$, avec

- $E_c(f) = \frac{1}{2}mv_f^2$ et $v_f = 2.4 \times 10^3$ m/s,
- $E_c(i) = 0$ (immobile au départ),
- $W(\vec{F}) = F \times d = IlB_0d$.

On a donc

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = IlB_0d, \quad \text{d'où} \quad B_0 = \frac{mv_f^2}{2Ild} = 5,76 \times 10^3 \text{ T}.$$

Remarque : Il est aussi possible de passer par un PFD, que l'on intègre pour avoir $v(t)$ puis $x(t)$. Mais c'est plus long.

c - Ceci est beaucoup trop élevé pour un champ créé de façon permanente.

Remarque : Le courant I est supposé imposé par le générateur et est donc constant. La force de Laplace est donc constante et les phénomènes d'induction (du prochain chapitre!) n'interviennent pas.

2 - L'idée est cette fois de se servir du champ magnétique produit par les rails eux-même.

À une distance r d'un fil, le champ est donné par $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Pour $r = 10$ cm, on a $B = 2$ T.

Si on reprend l'expression précédente, la vitesse finale est alors $v_f = \sqrt{\frac{2IlB_0d}{m}} = 1,4 \times 10^3$ m/s, ce qui est bien du bon ordre de grandeur.

II Méthode de Gauss de mesure du champ magnétique [● ○ ○]

1 - Le champ $\vec{B}$ exerce un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = -BM \sin \theta \vec{e}_z$ sur le barreau, soit en projetant sur l'axe Oz :

$$\Gamma = -BM \sin \theta.$$

Le théorème du moment cinétique donne donc :

$$J\ddot{\theta} = -MB \sin \theta,$$

soit pour des oscillations de faible amplitude une pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{BM}{J}}.$$

2 - L'aiguille $\vec{m}$ est à l'équilibre, donc la somme des couples agissant sur elle est nulle.

On a d'une part celui exercé par le champ $\vec{B}$: $\Gamma = -mB \sin \theta = mB \sin |\theta|$ ($\theta < 0$ sur le schéma).

Et celui exercé par l'action de $\vec{M}$ donnée dans l'énoncé.

D'où :

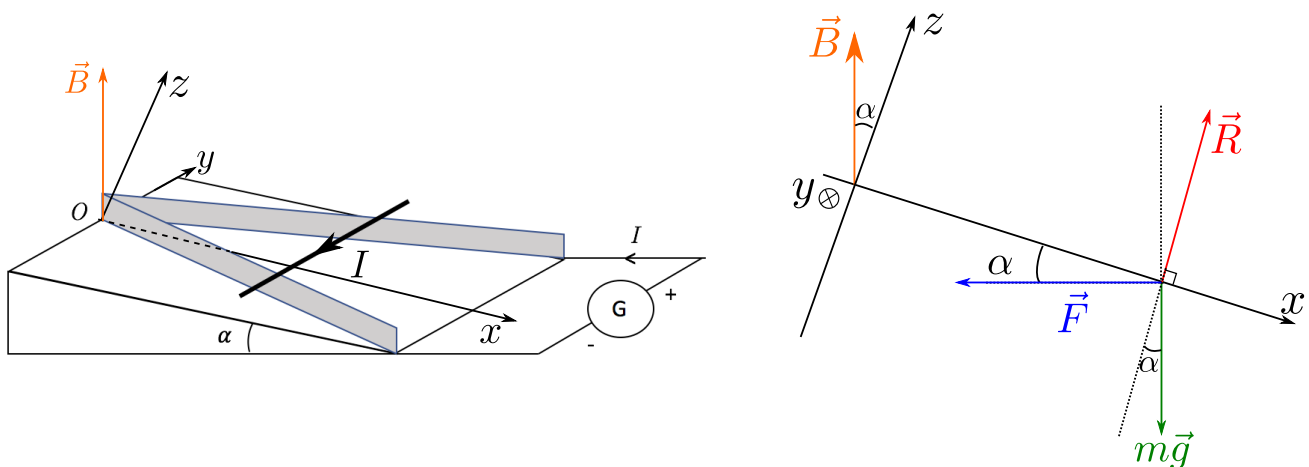
$$mB \sin |\theta| - \frac{\mu_0 m M}{2\pi r^3} = 0, \quad \text{soit} \quad B \sin |\theta| = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}.$$

3 - Avec les résultats des deux étapes on peut éliminer le moment magnétique M inconnue, et obtenir :

$$B = \omega_0 \sqrt{\frac{\mu_0 J}{2\pi r^3 \sin |\theta|}},$$

d'où la mesure de B par des mesures mécaniques seulement.

III Rail de Laplace modifiés [•••]



1 - Le champ magnétique doit être vers le haut pour que $I\vec{L} \wedge \vec{B}$ soit dirigé vers le point O et fasse monter la tige.

2 - ★ Il faut d'abord exprimer $\vec{B}$ et $\vec{L}$ dans le repère $Oxyz$:

$$- \vec{L} = -l(x) \vec{e}_y.$$

$$- \vec{B} = B \cos \alpha \vec{e}_z - B \sin \alpha \vec{e}_x.$$

$$\text{On a donc} \quad \vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B} = -IlB(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z).$$

Sur le schéma ceci donne un vecteur horizontal dirigé vers la gauche, donc vers le point O .

★ Ensuite, la longueur de la portion de la tige qui conduit le courant est $l(x)$ et dépend de la position x .

On voit que $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{l/2}{x}$, donc $l = 2x \tan \frac{\beta}{2}$. D'où finalement :

$$\vec{F} = -2IBx \tan \frac{\beta}{2} (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z).$$

3 - À l'équilibre, la somme des trois forces s'exerçant sur la tige est nulle (poids, force de Laplace et réaction du rail) : $\vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$.

Comme on ne connaît pas $\vec{R}$, on projette sur $\vec{e}_x$. $\vec{R} \cdot \vec{e}_x = 0$ car il n'y a pas de frottements.

Or $\vec{g} = -g \cos \alpha \vec{e}_z + g \sin \alpha \vec{e}_x$, donc sur $\vec{g} \cdot \vec{e}_x = g \sin \alpha$, et on obtient à l'équilibre :

$$-2IBx \tan \frac{\beta}{2} \cos \alpha + 0 + mg \sin \alpha = 0, \quad \text{d'où} \quad x_{\text{éq}} = \frac{mg \tan \alpha}{2IB \tan(\beta/2)}.$$

IV Équilibre d'un aimant _____ [● ○ ○]

Considérons un axe Δ sortant de la feuille $\odot$.

- Le poids a pour moment par rapport à cet axe $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -d \times mg$ (bras de levier $OG = d$ mais rotation en sens négatif).
- Le couple magnétique s'exprime lui par $\Gamma_\Delta = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta = +\mathcal{M}B$ à l'équilibre où $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.

À l'équilibre,

$$\Gamma_\Delta + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{d = \frac{\mathcal{M}B}{mg}}. \quad (1)$$