

## Physique-chimie – DS 2

Le sujet comporte quatre parties indépendantes, qui comptent chacune pour environ un quart du barème :

- I - Oscillateur électronique
- II - Sous-marins, première partie : immersion du sous-marin
- II - Sous-marins, deuxième partie : propulsion du sous-marin
- III - Bilan des forces sur un barrage

Elles peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

### I Oscillateur électronique

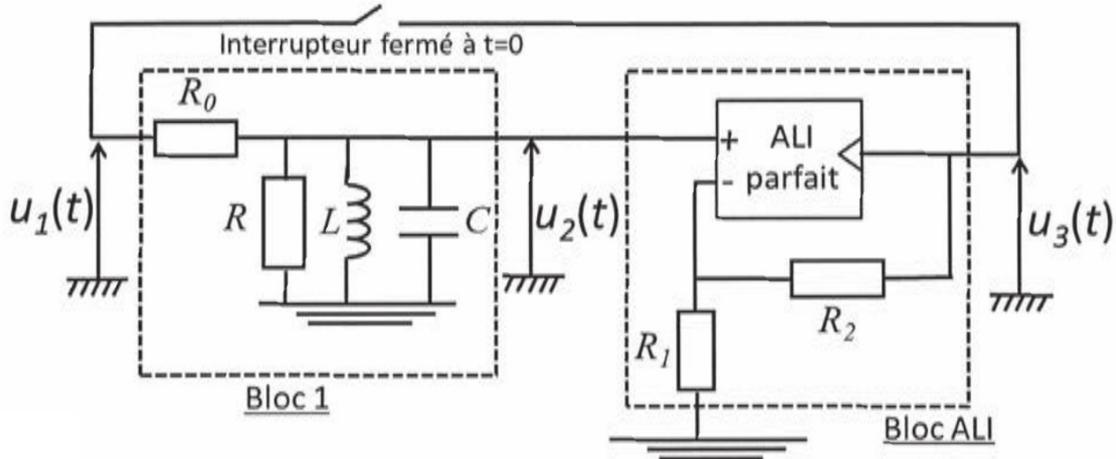
Extrait du sujet de concours PT 2015.

Les capteurs capacitifs sont une catégorie de capteurs permettant de mesurer des déplacements de façon très précise. Ils sont par exemple utilisés dans les accéléromètres miniaturisés.

Le principe est le suivant : une des deux électrodes du condensateur est rattachée à la partie fixe du boîtier, alors que la seconde est mobile. Un déplacement de l'électrode mobile entraîne une variation de la capacité  $C$  du condensateur qui est proportionnelle au déplacement.

Il faut ensuite trouver un moyen de mesurer précisément la capacité  $C$ . Ceci peut être réalisé en insérant la capacité dans un montage oscillant, dont la fréquence va dépendre de  $C$ . La fréquence est ensuite facilement mesurée (avec un fréquencemètre par exemple). L'objet du problème qui suit est d'étudier un exemple d'oscillateur électronique.

On considère le montage suivant :



Montage envisagé pour extraire l'information issue d'un capteur. L'ALI utilisé, que l'on supposera parfait, est alimenté au moyen d'une alimentation symétrique  $\pm V_{CC} = \pm 12V$  et sa tension de saturation est  $V_{SAT} = 11V$ .

#### I.1 Étude du bloc 1 filtre

L'étude du bloc 1 était le sujet du DM 1. On montrait alors que sa fonction de transfert complexe est

$$H = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)},$$

avec  $x = \omega/\omega_0$ ,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad A_0 = \frac{1}{1 + R_0/R}, \quad Q = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{R_0}{1 + R_0/R}.$$

Les valeurs numériques retenues sont  $A_0 = 0.1$  et  $Q = 25$ .

1 – Quelle est la nature de ce filtre ? On justifiera la réponse.

## I.2 Étude du bloc ALI

2 – Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert complexe  $\underline{G} = u_3/u_2$ .

3 – On pose  $K = |G|$ . Exprimer  $K$  en fonction de  $R_1$  et  $R_2$ .

## I.3 Système bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi un système bouclé.

4 – Dédurre des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par  $u_3$ .

5 – À partir de cette équation :

5.a – Trouver une condition liant  $A_0$  et  $K$  et  $Q$  pour que s'établissent des oscillations quasi sinusoïdales.

5.b – Déterminer alors la fréquence de ces oscillations.

6.a – Toujours à partir de l'équation différentielle, montrer que la naissance d'oscillations impose des conditions sur le produit  $A_0K$  et les expliciter.

6.b – Lorsque cette condition est satisfaite, quelle est l'allure de la solution de l'équation différentielle ?

7.a – En pratique, lorsque la condition précédente est satisfaite, les oscillations se stabilisent à une certaine valeur. Expliquer pourquoi.

7.b – Tracer alors l'allure du signal (depuis le moment où on ferme l'interrupteur jusqu'au régime permanent).

## I.4 Utilisation du dispositif

On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements  $x$  de la partie mobile d'un capteur capacitif dont la capacité est donnée par la loi  $C = C_0(1 - x/l)$ , avec  $C_0 = 10 \mu\text{F}$  et  $l = 10 \text{ mm}$ . Ce capteur forme le condensateur du bloc 1.

- Les composants choisis sont tels que le montage oscille à une fréquence  $f_{\text{osc}}$  liée à la capacité  $C$  par la relation  $f_{\text{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C}}$  avec  $D = 1 \text{ H}^{-1/2}$ .
- À la position de référence du capteur ( $x = 0$ ), la fréquence d'oscillation est  $f_{\text{or}}$ .

8.a – Montrer que, pour un petit déplacement  $x$  ( $x \ll 1$ ), la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme  $f_{\text{osc}} = ax + b$ , et expliciter  $a$  et  $b$  en fonction des données.

8.b – On note  $\Delta f = f_{\text{osc}} - f_{\text{or}}$  la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est  $\Delta f_{\text{min}} = 3.0 \text{ Hz}$ ; quel est le plus petit déplacement détectable ?

## II Sous-marins

Extrait du sujet de concours CCP 2012.

Nous nous proposons, dans ce problème, d'étudier quelques dispositifs relatifs aux sous-marins. Dans tout ce problème, le référentiel terrestre sera supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

### Première partie : immersion du sous-marin

Les données nécessaires pour cette première partie sont rassemblées ci-dessous :

- pression atmosphérique :  $P_{\text{atm}} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,
- masse volumique de l'eau de mer à la surface  $\rho_0 = 1.03 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,
- champ de pesanteur terrestre :  $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,
- masse du sous-marin (hors masse du fluide dans les ballasts) :  $M = 1.40 \times 10^7 \text{ kg}$ ,
- longueur du sous-marin :  $L = 138 \text{ m}$ ,
- rayon du sous-marin (rayon de la coque extérieure) :  $R = 6.0 \text{ m}$ .

## 1/ Relation entre pression et profondeur dans l'eau de mer

**1.1/** On s'intéresse à un volume élémentaire  $d\tau = dx dy dz$  d'eau de mer à l'équilibre (figure 1). On notera  $P(x, y, z)$  la pression de l'eau en un point de coordonnées  $(x, y, z)$ .

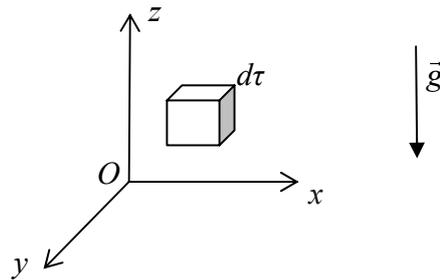


Figure 1 : équilibre d'un volume élémentaire

Citer les forces s'exerçant sur ce volume élémentaire.

En traduisant l'équilibre de ce volume  $d\tau$ , montrer que la pression ne dépend pas des coordonnées  $x$  et  $y$ .

Donner alors l'expression de la résultante des forces s'exerçant sur  $d\tau$  en fonction de  $g$ ,  $\rho(z)$ ,  $P(z)$ ,  $P(z + dz)$ ,  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  et  $\vec{e}_z$  vecteur unitaire de l'axe  $(Oz)$  ascendant. En déduire la relation

fondamentale de la statique des fluides  $\frac{dP}{dz} = -\rho g$  (1).

**1.2/** On suppose que l'eau de mer est incompressible et homogène, c'est-à-dire que sa masse volumique  $\rho$  est constante. Intégrer dans ces conditions l'équation (1) et en déduire l'expression de la pression  $P(z)$  à la cote  $z$  en fonction de  $\rho$ ,  $g$ ,  $z$  et  $P_0 = P(z = 0)$ .

Calculer numériquement la pression  $P_{300}$  à 300 m de profondeur, en prenant  $P_0 = P_{atm}$  et  $\rho = \rho_0$ .

## 2/ Utilisation des ballasts

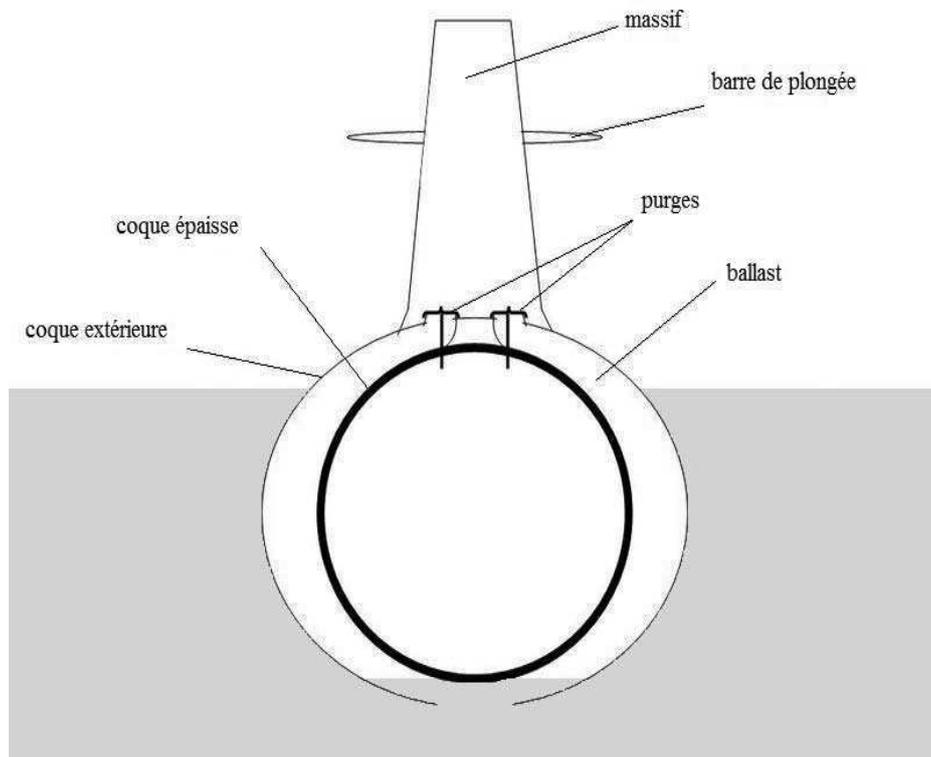


Figure 2 : schéma simplifié du sous-marin

Pour permettre au sous-marin de monter et de descendre, un système de ballasts pouvant se remplir d'eau ou d'air permet de modifier sa masse. Les ballasts sont des réservoirs situés entre la coque extérieure et la coque épaisse des sous-marins (figure 2).

On considère toujours l'eau de mer homogène et incompressible, de masse volumique uniforme et égale à  $\rho_0$ .

**2.1/** On suppose dans cette question que le sous-marin flotte à la surface de l'eau. Les ballasts sont alors remplis d'air. En négligeant la poussée d'Archimède dans l'air ainsi que le poids de l'air contenu dans les ballasts, donner la relation entre le volume total immergé du sous-marin  $V_{imm}$ , sa masse  $M$  et la masse volumique de l'eau de mer  $\rho_0$ .

**2.2/** On modélise le sous-marin par un cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . Donner l'expression du rapport  $\frac{V_{imm}}{V}$  où  $V$  est le volume total du sous-marin ainsi modélisé, en fonction de  $M$ ,  $\rho_0$ ,  $L$  et  $R$ .

Effectuer l'application numérique et commenter.

**2.3/** Expliquer qualitativement ce qui se passe quand on remplace progressivement l'air contenu dans les ballasts par de l'eau de mer.

**2.4/** Le sous-marin est en immersion quand les ballasts sont entièrement remplis d'eau de mer. Donner la relation entre  $M$ ,  $V$ , le volume des ballasts  $V_b$  et la masse volumique de l'eau de mer  $\rho_0$ . Calculer numériquement le volume des ballasts  $V_b$ .

**2.5/** Expliquer qualitativement pourquoi la coque intérieure doit être épaisse et très résistante, alors que la coque extérieure est plus mince et légère.

## Deuxième partie : propulsion du sous-marin

Les systèmes de propulsion doivent répondre à quelques grandes exigences, en particulier être silencieux pour ne pas être repérés et fonctionner de manière anaérobie, c'est-à-dire sans utiliser d'air, vu qu'en immersion totale le milieu extérieur est l'eau et non l'air. La propulsion nucléaire est un type de propulsion largement utilisée dans les sous-marins militaires à l'heure actuelle. Les AIP (Air Indépendant Propulsion) représentent une autre classe de propulsion fonctionnant de manière classique, sans apport d'air et permettant de s'affranchir du danger nucléaire. Parmi ces AIP, nous nous intéresserons au moteur Stirling. Les sous-parties 3/ et 4/ sont indépendantes.

**Remarque :** L'énoncé se poursuit par une sous partie 3/ qui étudie le cycle de propulsion nucléaire. Elle fait appel à la thermodynamique des systèmes ouverts, que nous n'avons pas encore vu. Nous passons donc à la partie 4/.

### 4/ Moteur Stirling

Le moteur Stirling a été développé au XIX<sup>e</sup> siècle et a rapidement été délaissé au profit des moteurs à combustion interne (à essence et diesel) ; il pourrait cependant connaître un essor significatif dans le futur compte-tenu, entre autres, des avantages qu'il présente en matière de protection de l'environnement. Par exemple, le sous-marin civil SAGA développé dans les années 80 et destiné à l'industrie pétrolière offshore est équipé d'un moteur Stirling.

La structure du moteur est représentée sur la figure 7.

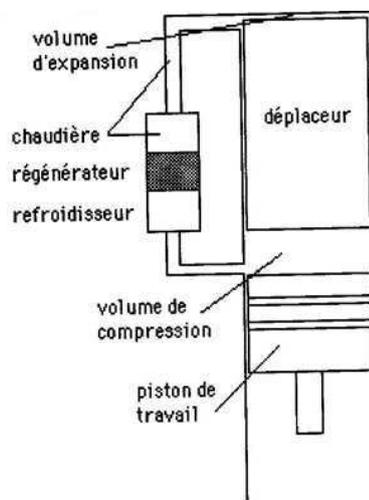


Figure 7 : schéma d'un moteur Stirling

Dans une enceinte principale, peuvent se mouvoir d'une part un piston de travail et d'autre part un déplaceur, dont le rôle est de transvaser le fluide de travail depuis le volume de compression (zone froide) vers le volume d'expansion (zone chaude) et réciproquement ; lors du transvasement, le fluide parcourt dans un sens ou dans l'autre la chaudière à la température  $T_3$ , le régénérateur et le refroidisseur à la température  $T_1$ .

Le fluide de travail décrit le cycle constitué des 4 phases suivantes (figure 8) :

- pendant la phase de compression 1 - 2, le déplaceur se trouve en position haute et le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le haut.

- Au point 2, le piston est au point mort haut et le déplaceur est ramené en position basse, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe pendant la phase 2 - 3 de la zone froide vers la zone chaude, commençant par se réchauffer dans le régénérateur puis recevant un transfert thermique de la chaudière.
  - Pendant la phase de détente 3 - 4, le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé par les tubes de la chaudière. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail vers le bas.
  - Pendant la phase 4 - 1, après que le piston ait atteint le point mort bas, le déplaceur est ramené en position haute, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide commence par céder un transfert thermique au régénérateur, puis il est refroidi par le refroidisseur.
- En pratique, le régénérateur est un échangeur de chaleur : il reçoit un transfert thermique du gaz chaud dans un sens de circulation, qu'il restitue dans l'autre sens, lorsque le gaz est froid.

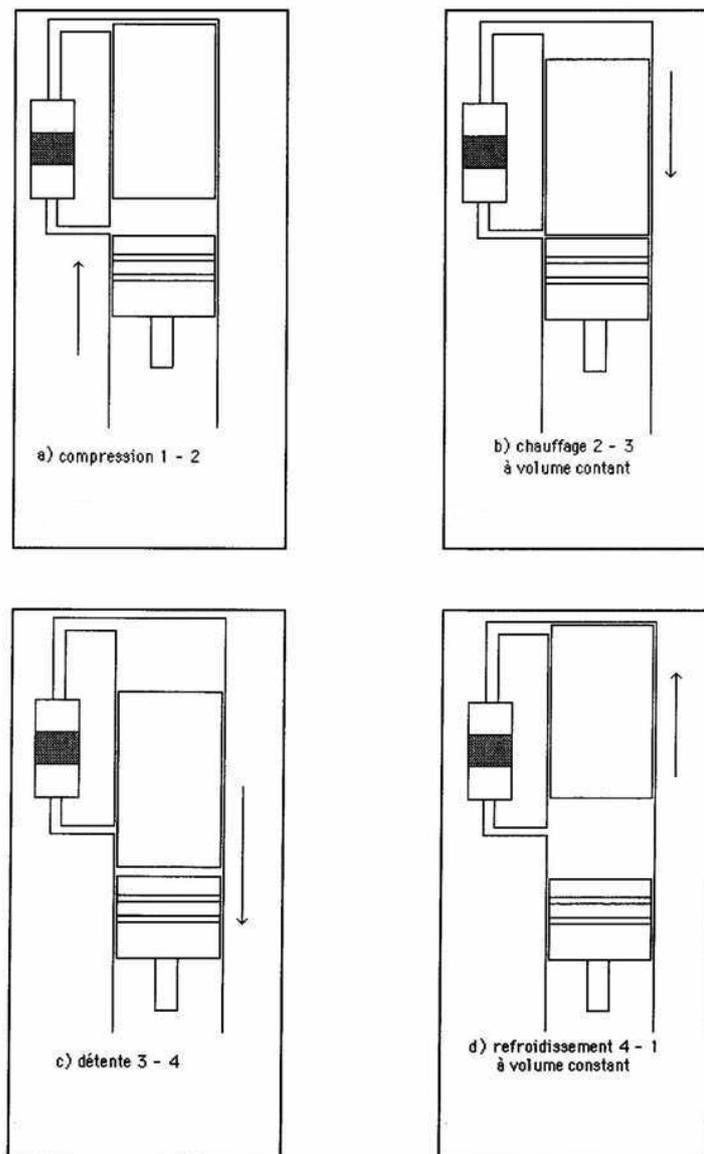


Figure 8 : cycle du moteur Stirling

Nous étudierons le cycle de Stirling idéal ; au cours de celui-ci,  $n$  mol de gaz parfait de rapport  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  subissent les évolutions suivantes :

- compression 1 - 2 isotherme réversible à la température  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,
- échauffement 2 - 3 isochore jusqu'à l'état 3 de température  $T_3 = 600 \text{ K}$ ,
- détente 3 - 4 isotherme réversible à la température  $T_3$ ,
- refroidissement 4 - 1 isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas de travail autre que celui des forces de pression. On rappelle que  $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$ .

**4.1/** Représenter l'allure du cycle dans le diagramme  $(P, V)$ . Comment peut-on savoir, sans calcul, si le cycle proposé est celui d'un moteur ou d'un récepteur ?

**4.2/** Exprimer le travail reçu par le fluide au cours de la compression  $W_{12}$  en fonction de  $n, R, T_1$  et du rapport de compression  $\rho = \frac{V_1}{V_2}$ . En déduire le transfert thermique  $Q_{12}$  reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de  $n, R, T_1$  et  $\rho$ . Préciser les signes de  $W_{12}$  et  $Q_{12}$ .

**4.3/** Exprimer le transfert thermique  $Q_{23}$  reçu par le fluide au cours de l'échauffement en fonction de  $n, R, T_1, T_3$  et  $\gamma$ . Préciser son signe.

**4.4/** Exprimer le travail reçu par le fluide au cours de la détente  $W_{34}$  en fonction de  $n, R, T_3$  et  $\rho$ . En déduire le transfert thermique  $Q_{34}$  reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de  $n, R, T_3$  et  $\rho$ . Préciser les signes de  $W_{34}$  et  $Q_{34}$ .

**4.5/** Exprimer le transfert thermique  $Q_{41}$  reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de  $n, R, T_1, T_3$  et  $\gamma$ . Préciser son signe.

**4.6/** Le régénérateur étant idéal, on a  $Q_{23} + Q_{41} = 0$ . Quelle est alors, sur le plan énergétique, la grandeur coûteuse (pour l'utilisateur) de ce système sur un cycle ?

La grandeur énergétique utile est le travail fourni par le fluide sur le cycle. En déduire l'expression du rendement  $\eta'$  en fonction de  $T_1$  et  $T_3$ . Commenter puis faire l'application numérique.

### III Bilan des forces sur un barrage poids

Un barrage poids est un barrage construit à partir d'éléments de maçonnerie en béton, de roche et de terre et conçu pour retenir l'eau en utilisant seulement le poids de la matière qui s'oppose à la pression horizontale de l'eau s'exerçant sur le barrage.

Le barrage de la Grande-Dixence (dans les Alpes suisses) est le plus haut barrage poids du monde. Il est schématiquement représenté ci-contre (schéma du haut).

Pour simplifier, on modélisera le barrage de la façon suivante :

- sa section est un triangle rectangle de base  $e = 200$  m et de hauteur  $h = 285$  m, qui correspond aussi au niveau d'eau ;
- il est invariant dans la direction  $y$ , de longueur  $L = 700$  m ;
- sa masse volumique est uniforme égale à  $d\rho_0$ , où  $\rho_0$  est la masse volumique de l'eau et  $d = 2.3$  la densité du barrage relativement à l'eau.

En ce qui concerne l'eau, on supposera qu'il s'agit d'un liquide incompressible de masse volumique  $\rho_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

On note  $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  la pression atmosphérique, supposée uniforme dans l'air.

On prendra  $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  uniforme.

On rappelle que la pression dans l'eau à la profondeur  $z$  est donnée par  $p(z) = p_0 + \rho_0 g z$ .

1. Exprimer puis calculer le poids du barrage.

#### Barrage sans eau

On étudie d'abord le barrage lorsqu'il n'y a pas d'eau, et donc uniquement de l'air des deux côtés.

2. Exprimer la résultante  $\vec{F}_1$  des forces de pression qui s'exercent sur la face verticale du barrage (la face de hauteur  $h$  où il y a habituellement de l'eau).
3. **a** - Donner l'expression du vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à la face inclinée et dirigé vers l'intérieur du barrage en fonction de l'angle  $\alpha$  et des vecteurs  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$ .  
**b** - Exprimer la résultante  $\vec{F}_2$  des forces de pression qui s'exercent sur la face inclinée du barrage.
4. Donner l'expression de la résultante totale des forces de pression due à l'air  $\vec{F}_{\text{air}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  en fonction de  $p_0$ ,  $L$ ,  $e$ .

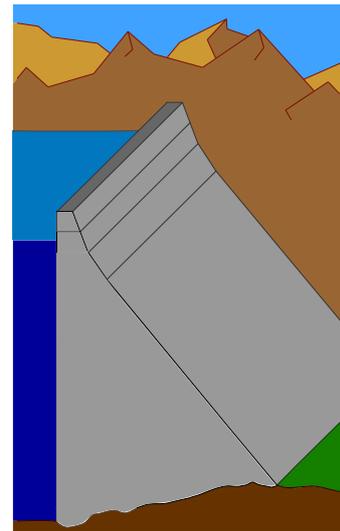
Faire l'application numérique et comparer au poids du barrage.

Dans la suite :

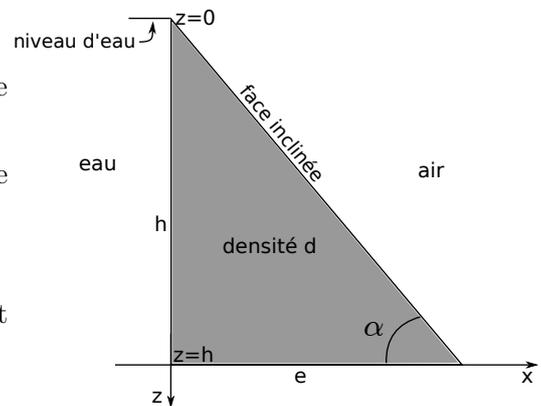
- On négligera la composante verticale de la force due à la pression de l'air devant le poids du barrage.
- Comme on l'a vu dans la question précédente, la composante horizontale des forces de pression due à l'air s'annule.

Ceci revient donc à ignorer les forces de pression dues à l'air, et à prendre pour expression  $p(z) = \rho_0 g z$  pour la pression dans l'eau à la profondeur  $z$ .

vue schématique du barrage :



vue en coupe du modèle simplifié :



## Barrage avec eau

On considère maintenant le barrage rempli avec une hauteur  $h$  d'eau. On rappelle qu'on prend  $p_0 = 0$  dans cette question (on ignore les effets de l'air).

5. Montrer que la résultante de l'action des forces de pression due à l'eau sur le barrage s'écrit

$$\vec{F}_{\text{eau}} = \frac{1}{2}\rho_0 g L h^2 \vec{e}_x.$$

Le barrage n'avance pas en glissant dans la direction  $\vec{e}_x$  à cause des frottements exercés par le sol sur le barrage. On rappelle la condition de non glissement de Coulomb : le barrage reste immobile tant que  $\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$ , où  $\vec{T}$  est la composante tangentielle des forces de frottement (selon l'axe  $x$ ) et  $\vec{N}$  la composante normale (selon l'axe  $z$ ), et  $\mu_s$  le coefficient de frottement statique. On prendra  $\mu = 2$ .

6. Faire un dessin de la section du barrage sur lequel figure les différentes forces qui s'exercent sur le barrage, représentées avec la bonne orientation.
7. **a** - En effectuant un bilan des forces sur le barrage, exprimer  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  en fonction de paramètres connus.
- b** - En déduire une condition sur  $h$ ,  $e$ ,  $d$  et  $\mu_s$  pour que le barrage ne glisse pas. Cette condition est-elle vérifiée pour le barrage de la Grande-Dixence ?

**Remarque :** La modélisation retenue ici est extrêmement grossière. Il faudrait plutôt modéliser localement l'action entre le barrage et le sol à l'aide de la pression exercée par le barrage sur le sol. Ceci permettrait également de donner une condition de non basculement du barrage, que l'on ne peut pas obtenir ici.