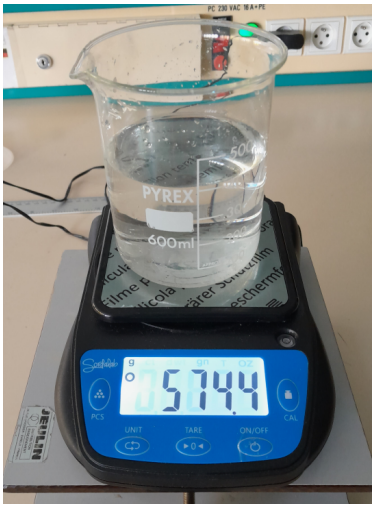
12.18 Poussée d'Archimède [●◐○]

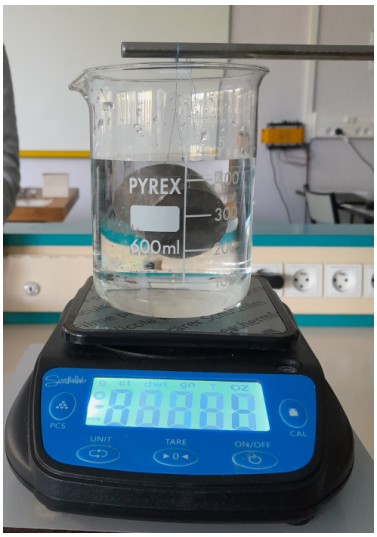
On réalise l'expérience suivante avec un morceau cylindrique de métal :



1/ Morceau de métal seul posé sur la balance.
La balance indique 133,6 g.



2/ Bécher rempli d'eau seul posé sur la balance.
La balance indique 574,4 g.



3/ Morceau de métal, retenu par une ficelle et immergé entièrement dans l'eau (mais sans toucher le fond).
La balance indique 623,7 g.

La balance est tarée plateau vide.

1 - En déduire la densité du métal, et l'identifier parmi la liste.

Métal/Alliage	Plomb	Bismuth	Or	Platine	Etain	Argent
c (J.kg^{-1}.K^{-1})	129	122	129	130	228	234
densité	11	9,8	19	21	7,3	10

Métal/Alliage	Laiton	Zinc	Cuivre	Nickel	Fer	Acier(1,5% C)	Aluminium
c (J.kg^{-1}.K^{-1})	377	380	385	440	444	470	897
densité	8,9	7,1	9,0	8,3	7,9	7,7	2,7

12.18 – **Correction** *Prenons z vers le haut.*

1 - *En 1/, le plateau de la balance est soumis à $P = mg = \rho_{métal}Vg$, dirigé vers le bas, avec m la masse du morceau de métal et V son volume. Donc $m = \rho_{métal}V = 133{,}6\,g$.*
En 2/, le plateau de la balance est soumis à $P = m_0 g$, dirigé vers le bas, avec m_0 la masse de bécher+eau.
En 3/, l'eau exerce sur le morceau de métal une poussée d'Archimède $\Pi = \rho_{eau}Vg$ vers le haut. Donc le métal exerce sur l'eau une force opposée : $\Pi = \rho_{eau}Vg$ vers le bas, ce qui appuie sur le plateau. C'est ce qui explique le surpoids par rapport à 2/.
On a donc $\rho_{eau}V = 623{,}7 - 574{,}4 = 49{,}3\,g$.
Et enfin, $d_{métal} = \dfrac{\rho_{métal}}{\rho_{eau}} = \dfrac{\rho_{métal}V}{\rho_{eau}V} = \dfrac{133{,}6}{49{,}3} = 2{,}71$. C'est de l'aluminium.

12.19 Chute libre d'un parachutiste et résolution numérique – DM [●●○]

Fin juillet 2016, Luke Aikins a sauté d'un avion sans parachute ni wingsuit, d'une altitude de 7,6 km. Sa chute a duré deux minutes. Il a atteint la vitesse maximale de 193 km/h. Il s'est réceptionné dans un filet de 30 m sur 30 m à 61 m du sol. Nous nous proposons d'étudier cette chute.

Compte tenu de la vitesse, les forces de frottements sont du type $f = kv^2$, avec k un coefficient et v la norme de la vitesse. On prendra pour l'intensité de la pesanteur $g = 10\,\text{m/s}^2$. La masse de Luke Aikins est de 100 kg. On prend un axe z dirigé vers le bas, dont l'origine est au niveau du départ du saut.

1 - Établir l'équation du mouvement portant sur la position $z(t)$ de Luke et celle sur sa vitesse $v(t)$. On fera un schéma.

2 - En déduire l'expression de la vitesse limite v_l atteinte par Luke, en fonction des autres paramètres.

3 - En déduire la valeur numérique du coefficient de frottement k. On prendra garde à l'unité de k.

On souhaite savoir au bout de combien de temps la vitesse limite est atteinte, et également au bout de quelle hauteur de chute.

4 - Il faut pour cela résoudre l'équation différentielle établie à la question 1. Est-elle linéaire ? Connaissez vous une méthode simple de résolution ?

Dans ce cas, une possibilité est d'utiliser une résolution numérique. C'est ce que nous avons fait ci-contre, où nous avons résolu l'équation différentielle à l'aide de la méthode d'Euler grâce à un algorithme écrit en Python, partiellement écrit ci-dessous :

```
g = 9.8          # pesanteur, m/s**2
vl = 193./3.6    # vitesse limite, m/s
m = 100.         # masse en kg
k = m*g/vl**2    # coefficient de frottement de la loi en k*v**2

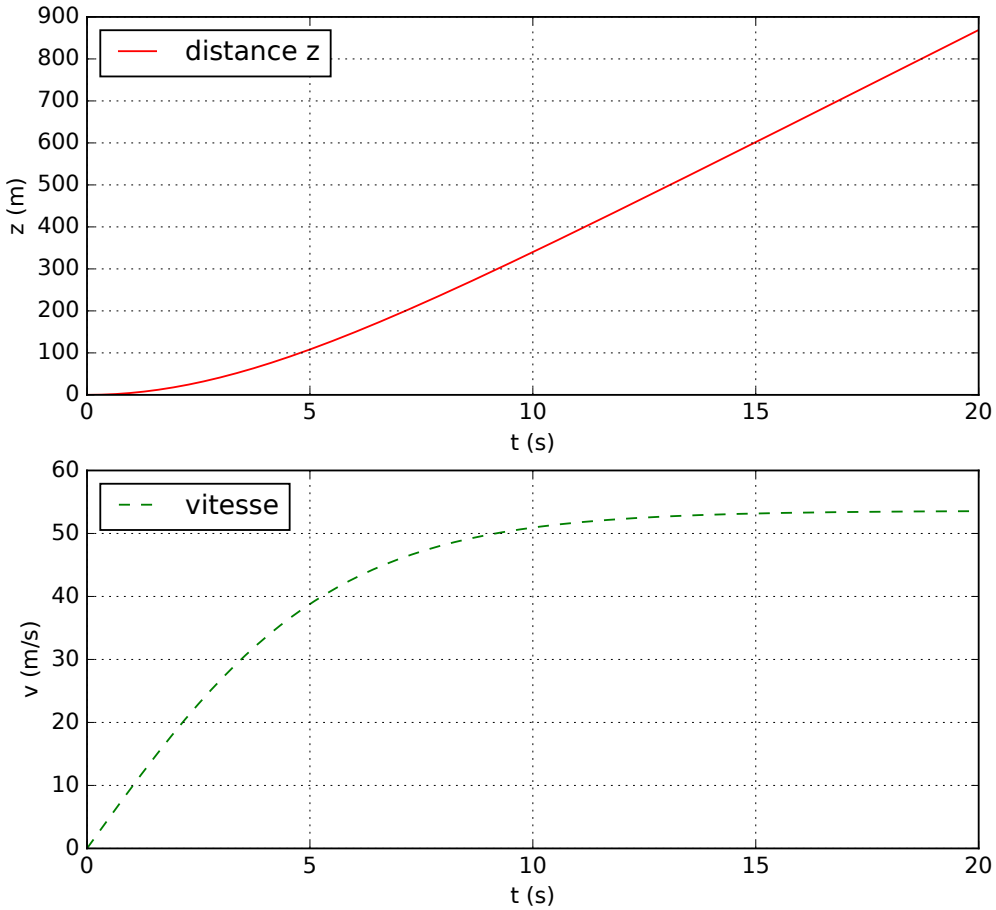
v0 = 0.          # vitesse initiale
dt = 0.02        # pas d'integration en secondes
fin = 20.        # durée de la simulation (secondes)

liste_t = [0]    # liste des instants t
liste_z = [0]    # liste des positions z
liste_v = [v0]   # liste des vitesses v
t = 0.
z = 0.
v = v0

nb_iterations = int(fin/dt)
for i in range(nb_iterations):
    # à compléter (plusieurs lignes)
```

5 - Proposer les lignes de code manquantes ci-dessus, afin que la boucle `for` remplisse les listes `liste_t`, `liste_z` et `liste_v` de façon adéquate.

6 - À l'aide de la résolution numérique, estimer le temps nécessaire pour atteindre 95% de la vitesse limite. Au bout de quelle hauteur de chute cela a-t-il lieu ?



Pour plus d'informations sur le saut de Luke Aikins : voir le livre *Quand je fais de la physique* de L. Mathieu.

12.19 – Correction

1 - ⋆ *Schéma obligatoire.* ⋆ *Système : {Luke}, référentiel terrestre supposé galiléen.*

⋆ *Bilan des forces :*

— *le poids* $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$;

— *la force de frottement* $\vec{f} = -kv^2\vec{e}_z$ *(elle est dirigée selon* $-\vec{e}_z$ *car la chute est purement verticale et vers le bas).*

⋆ *Principe fondamental de la dynamique :* $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{f}$.

Or ici $\vec{v} = v\vec{e}_z$*, donc on obtient :* $m\dfrac{dv}{dt}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - kv^2\vec{e}_z$.

⋆ *Projection sur* $\vec{e}_z$ *:* $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$*. Soit donc :* $\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v^2 = g.}$

2 - *La vitesse limite* v_l *est atteinte lorsque la force de frottement finit par compenser le poids. Mathématiquement,* $v_l = cst$*, donc dans l'équation du mouvement* $\dfrac{dv_l}{dt} = 0$*, et il reste donc* $0 + \dfrac{k}{m}v_l^2 = g$*, d'où* $\boxed{v_l = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}.}$

3 - *On inverse la relation précédente pour isoler* k *:* $\boxed{k = \dfrac{mg}{v_l^2} = 0{,}35\,\mathrm{kg\,m^{-1}}.}$

4 - *L'équation différentielle précédente n'est pas linéaire à cause du terme en* v^2*. Elle n'est donc pas simple à résoudre.*

5 - *Par exemple :*

```
t = t + dt
z = z + v*dt
```

```
v = v + (g - k*v**2/m)*dt
liste_t.append(t)
liste_z.append(z)
liste_v.append(v)
```

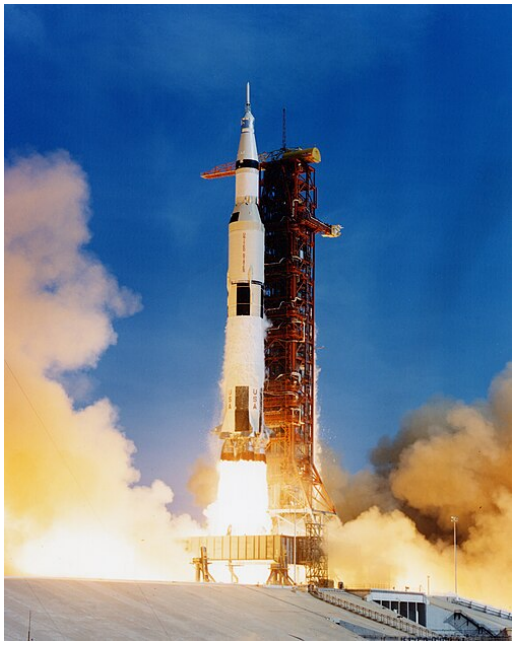
6 - *On lit sur le graphique qu'il faut 10 s pour atteindre 95% de la vitesse limite. Ceci a lieu au bout d'une hauteur de chute de 350 m environ. C'est donc assez rapide et la plus grande partie du saut a lieu à la vitesse limite.*

Attention : *la méthode avec 3τ ne marche que si la solution est en $e^{-t/\tau}$, ce qui n'est pas le cas ici (l'équation est non linéaire et on ne connait pas la forme de la solution).*

12.20 Décollage de la fusée Voskhod-2 [●●●]

D'après CCINP MP 2022.

On étudie le décollage d'une fusée. Le champ de pesanteur est uniforme dans la zone où *Voskhod-2* se déplace et a la valeur $g_0 = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. L'instant $t = 0$ est l'instant de départ de la fusée. On choisit un axe z orienté vers le haut, avec $z = 0$ au sol.



Décollage, ici de Apollo 11.

Le vaisseau est lancé par une fusée qui peut, à l'aide de tuyères, éjecter des gaz avec une vitesse de $u = 3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ (par rapport à la tuyère). La trajectoire de la fusée est supposée rectiligne verticale. Quand on écrit le principe fondamental de la dynamique au système ouvert fusée, dans le référentiel géocentrique, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m(t)g_0 - u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

Tout se passe comme si s'exerçait à l'instant t sur le système de masse $m(t)$, en plus du poids, une force de poussée égale au produit de la vitesse relative d'éjection par le débit massique ($D_m = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$) des gaz éjectés. Les forces de frottement sont négligées.

1 - Quel est le signe de $D_m = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$?

2 - Montrer que la fusée chargée (vaisseau, 2 passagers, combustible de masse initiale m_{comb}, carcasse, matériel...) de masse initiale $m_0 = M + m_{\mathrm{comb}}$ ne peut décoller que si le débit massique est suffisant (donner l'expression du débit massique minimal).

La masse $m(t)$ de la fusée chargée s'écrit tant qu'il y a du combustible :

$$m(t) = M + m_{\mathrm{comb}}(1 - \alpha t) = m_0 - m_{\mathrm{comb}} \times \alpha t.$$

On écrit l'équation du mouvement sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g_0 - u\frac{1}{m(t)}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

3 - Vérifier qu'une primitive de $\dfrac{1}{m(t)}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ est $\ln m(t)$.

En déduire, par intégration de l'équation sur la vitesse entre l'instant $t = 0$ et un instant t_1, la relation suivante :

$$v(t_1) = u \ln\frac{m_0}{m(t_1)} - g_0 t_1.$$

4 - Exprimer puis calculer la vitesse v_1 lorsqu'il n'y a plus de carburant. On prendra $M = 30$ tonnes, $m_{\text{comb}} = 90$ tonnes et $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ s^{-1}.

En intégrant l'expression précédente de $v(t)$, on peut montrer que l'altitude atteinte à l'instant t_1 où il n'y a plus de carburant vaut :

$$h = \frac{u}{\alpha}\left(1 - \frac{M}{m_{\text{comb}}}\ln\left(\frac{m_0}{M}\right)\right) - \frac{g_0}{2\alpha^2} = 127\,\text{km}.$$

Ensuite, le mouvement est celui d'un projectile soumis uniquement à son poids.

6 - À quel instant t_2 la vitesse devient-elle nulle ?

7 - Exprimer et calculer l'altitude H maximale que la fusée peut atteindre.

12.20 – **Correction**

1 - *$D_m > 0$ car la fusée perd de la masse (consommation du carburant).*

2 - *On utilise l'équation de l'énoncé, à $t = 0$ (au sol), en écrivant qu'il faut que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0$ pour décoller :*

$$-m_0 g_0 - u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} > 0.$$

D'où $-m_0 g_0 + u D_m > 0$, d'où la condition $\boxed{D_m > \dfrac{m_0 g_0}{u}.}$

3 - *Vérification de la primitive : trivial.*
Puis on prend l'équation et on l'intègre :

$$\int_0^{t_1} \frac{dv}{dt}dt = \int_0^{t_1} -g_0 dt - \int_0^{t_1} u\frac{1}{m(t)}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -g_0 t_1 - u\Big[\ln(m(t))\Big]_0^{t_1} = -g_0 t_1 - u\ln\frac{m(t_1)}{m(0)}.$$

Or $\int_0^{t_1} \frac{dv}{dt}dt = v(t_1) - v(0) = v(t_1)$. On a bien :

$$v(t_1) = u\ln\frac{m_0}{m(t_1)} - g_0 t_1.$$

4 - *Comme $m(t) = M + m_{comb}(1 - \alpha t)$, il n'y a plus de carburant pour $t_1 = 1/\alpha$ (soit 200 s seulement !).*
Alors, $\boxed{v(t_1) = u\ln\dfrac{m_0}{M} - g_0/\alpha \approx 2200\,\text{m/s}.}$

5 - *Pour $t > t_1$, l'équation du mouvement devient $\dot{v} = -g_0$.*
D'où $v(t) = v_1 - g_0(t - t_1)$ (attention aux constantes).
Elle s'annule pour $v_1 = g_0(t - t_1)$, donc $t_2 = t_1 + v_1/g_0 = 424\,s \approx 7\,min$.

6 - *On primitive encore : $z(t) = h_1 + \frac{g_0}{2}(t - t_1)^2$ (et on a bien $z(t_1) = h_1$ donc la constante d'intégration est correcte).*
Ainsi, $\boxed{H = z(t_2) = h_1 + \dfrac{g_0}{2}(t_2 - t_1)^2 = 373\,\text{km}.}$