

Mesures et incertitudes

Document utilisé pour une séance de 2h avec des élèves de terminale.

I Mesurer



FIGURE 1 – Une **même** masse posée tour à tour sur 15 balances différentes. Quelle est donc sa “vraie” masse ?

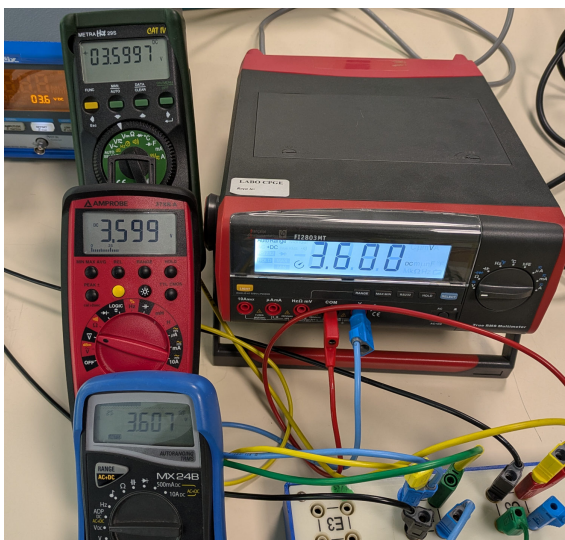


FIGURE 2 – Mesure d'une **même** tension avec 4 voltmètres différents. Toutes les valeurs sont différentes. Il y a un doute sur la valeur réelle.

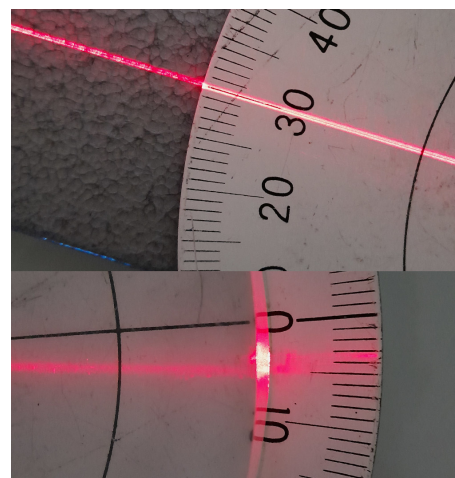


FIGURE 3 – Mesure d'un angle. La mesure du haut est assez claire. Mais que retenir pour celle du bas ?

DESCRIPTION DE L'INFRACTION

EXCES DE VITESSE

EXCES DE VITESSE INFÉRIEUR À 20 KM/H PAR CONDUCTEUR DE VÉHICULE À MOTEUR - VITESSE MAXIMALE AUTORISÉE SUPÉRIEURE À 50 KM/H
- Prévue par Art. R. 413-14 §1 du C. de la route.
- Réprimée par Art. R. 413-14 §1 al. 2 du C. de la route.

Votre véhicule a été contrôlé par un radar à la vitesse de 97 km/h, pour une vitesse limite autorisée de 90 km/h.

Date / heure de constatation :

. RD

. Direction : BOURGOIN JALLIEU vers LYON

Cette infraction a été constatée et validée par un agent ou un officier de police judiciaire du Centre automatisé de constatation des infractions routières (la vitesse retenue est de : 92 km/h).

Appareil de contrôle homologué

. Type : 210C - MESTA

. Date de dernière vérification : 07/06/2021

FIGURE 4 – Amende pour excès de vitesse. La vitesse retenue est inférieure de 5 km/h à la vitesse mesurée, pour tenir compte de l'incertitude de mesure du radar.



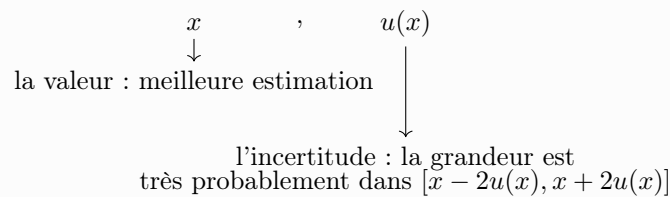
FIGURE 5 – Pot de pâte à tartiner. Il y a nécessairement un doute sur le "250 g". Le "e" indique le respect de normes européennes. Ici, la loi impose que la masse ne peut pas être inférieure à 241 g. https://www.legifrance.gouv.fr/codes/article_lc/LEGIARTI000006271469

I.1 Annonce d'un résultat de mesure

Pourquoi des incertitudes ?

Mesurer une grandeur ne consiste jamais à établir une valeur unique, mais plutôt à donner un **intervalle de valeurs** dans lequel il est probable que la grandeur mesurée se situe.

→ Un résultat de mesure est la donnée de **deux** éléments :



Autre écriture possible :

$$x \pm 2u(x)$$

Remarque : le "u" vient de "uncertainty" en anglais. $u(x)$ est appelée **incertitude-type** et a un sens mathématique bien précis, que nous verrons ensuite. De même pour le choix du facteur "2" ci-dessus.

Attention : normalement, on n'utilise jamais la notation $x \pm u(x)$, mais toujours $x \pm 2u(x)$.

En effet, l'intervalle $[x - u(x), x + u(x)]$ n'englobe pas toutes les valeurs probables de la grandeur mesurée, alors que $[x - 2u(x), x + 2u(x)]$, oui.

Exemples :

- Une balance de supermarché indique :

$$m = 335 \text{ g avec } u(m) = 2 \text{ g}$$

⇒ il y a, sur la balance, $335 \pm 4 \text{ g}$ de tomates, donc entre 331 g et 339 g.

Cette écriture dit que la masse sur la balance est

« très probablement dans la fourchette $[331 \text{ g}, 339 \text{ g}]$. »

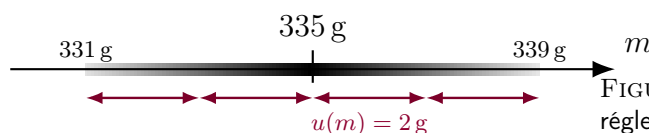
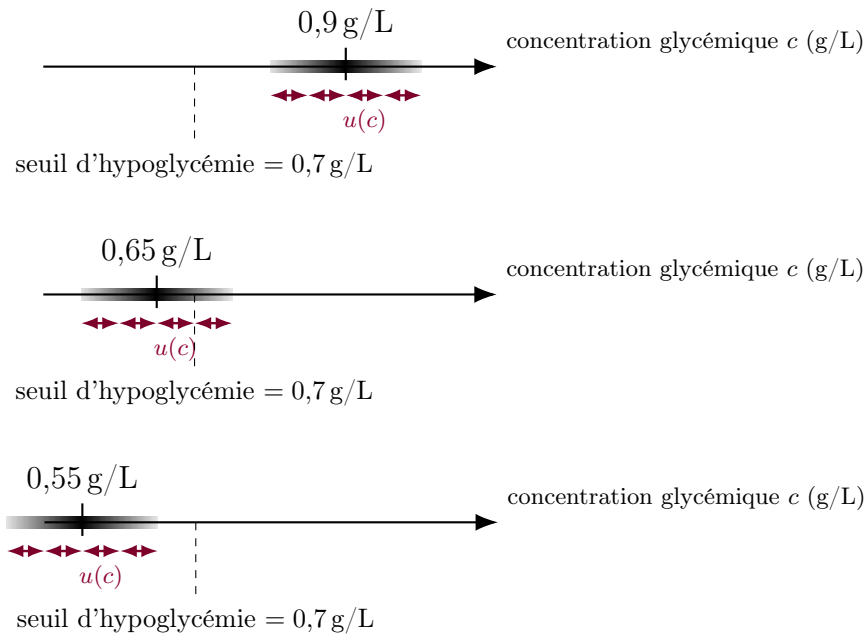
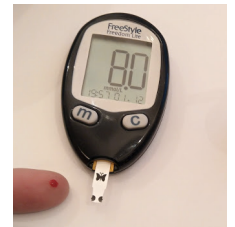


FIGURE 6 – Balance de supermarché. Sa précision est réglementée et contrôlée par des lois européennes.

- L'incertitude-type d'une analyse de taux de glucose dans le sang, avec un appareil portable, est de l'ordre de $u(c) = 0,05 \text{ g/L}$. Le seuil d'hypoglycémie est à $0,7 \text{ g/L}$. La connaissance de $u(c)$ est nécessaire pour conclure et pour **avoir confiance** en l'analyse.



- Mêmes considérations pour les pesages (commerces, matières premières), la fabrication de médicaments, les contrôles (radar routier, taux d'alcoolémie), la position GPS, le volume d'essence, les analyses chimiques ou biologiques (médicales, pollution, contrôle qualité, santé), la fabrication de pièces industrielles (boulons-écrous, roulements...), etc.
- Pour tester un modèle scientifique (compatibilité entre valeur prédite et valeur mesurée).

⇒ Mesurer **une** valeur est facile (l'appareil retourne toujours un résultat), mais **insuffisant**. Ce qu'il faut, c'est retourner une **fourchette de valeurs plausibles**.

Ceci est nécessaire : pour avoir confiance en une mesure, pour comparer deux mesures, pour les échanges commerciaux, les analyses biologiques, pour la démarche scientifique...

I.2 Règles d'écriture

(à lire plus tard, pour l'instant nous passons à la partie II)

L'incertitude-type $u(x)$ n'est jamais connue très précisément, et on se contente donc de l'exprimer avec **un** ou **deux** chiffres significatifs. On peut en garder deux si $u(x)$ sert ensuite dans d'autres calculs. Dans ce cours :

Règle d'écriture du résultat final

- ▶ On écrit $u(x)$ avec un seul chiffre significatif, arrondi au supérieur.
- ▶ On écrit ensuite x et $u(x)$ avec la même unité et la même puissance de 10.
- ▶ Enfin, pour x , on conserve autant de chiffres après la virgule que pour $u(x)$.
- ▶ On n'oublie pas l'unité, la même pour x et $u(x)$.

Résultat brut	1 CS pour $u(x)$	Écriture finale	Écriture $x \pm 2u(x)$
$x = 1,42345 \text{ m}$ et $u(x) \approx 0,0234 \text{ m}$	$u(x) = 0,03 \text{ m}$	$x = 1,42 \text{ m}$ et $u(x) = 0,03 \text{ m}$	$1,42 \pm 0,06 \text{ m}$
$x = 1,222 \text{ km}$ et $u(x) = 14 \text{ m}$	$u(x) = 0,014 \text{ km}$ $\approx 0,02 \text{ km}$	$x = 1,22 \text{ km}$ et $u(x) = 0,02 \text{ km}$	$1,22 \pm 0,04 \text{ km}$
$x = 4,234 \times 10^2 \text{ s}$ et $u(x) = 34 \text{ s}$	$u(x) = 0,34 \times 10^2 \text{ s}$ $\approx 0,4 \times 10^2 \text{ s}$	$x = 4,2 \times 10^2 \text{ s}$ et $u(x) = 0,4 \times 10^2 \text{ s}$	$(4,2 \pm 0,4) \times 10^2 \text{ s}$

II Comment estimer $u(x)$ lorsqu'on répète la mesure (type A)



Nous avons vu ce que signifie l'incertitude-type. Voyons maintenant comment l'estimer.

II.1 Variabilité de la mesure

Il arrive que répéter plusieurs fois une mesure donne des **résultats différents**. On parle de **variabilité** de la mesure. La variabilité est normale. Elle a plusieurs origines :

- Le matériel a changé (ce n'est plus la même fiole jaugée, plus le même voltmètre, plus la même règle...).
- Des facteurs extérieurs qui modifient la grandeur mesurée ont changé : la température, l'humidité...
- Ce que l'on mesure a changé : la concentration a évolué, du liquide s'est évaporé, la température a changé...
- La mesure **dépend de gestes et de prises de décision d'un être humain** (celui qui mesure), qui varient de répétition en répétition.

Exemples :

- en chimie, un opérateur qui remplit une fiole jaugée de volume 100 mL ne le fait pas tout le temps de la même manière ;
- un repérage du point d'équivalence sur une courbe de pH ou via le virage d'un indicateur coloré laisse une marge de doute ;
- en mécanique, chronométrer donne rarement deux fois la même durée ;
- en optique, repérer la position de la lentille où l'image est nette laisse un doute sur la position exacte à choisir ;
- une mesure de longueur, lorsque les points de départ et d'arrivée ne sont pas clairement délimités, laisse la part à une certaine appréciation ; ...

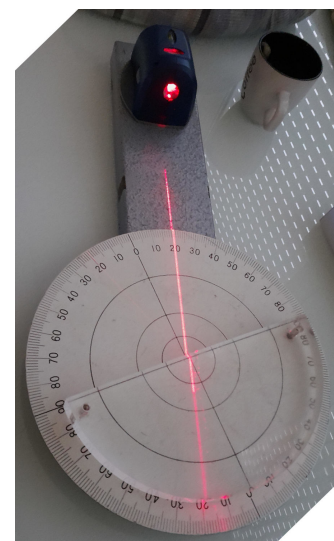
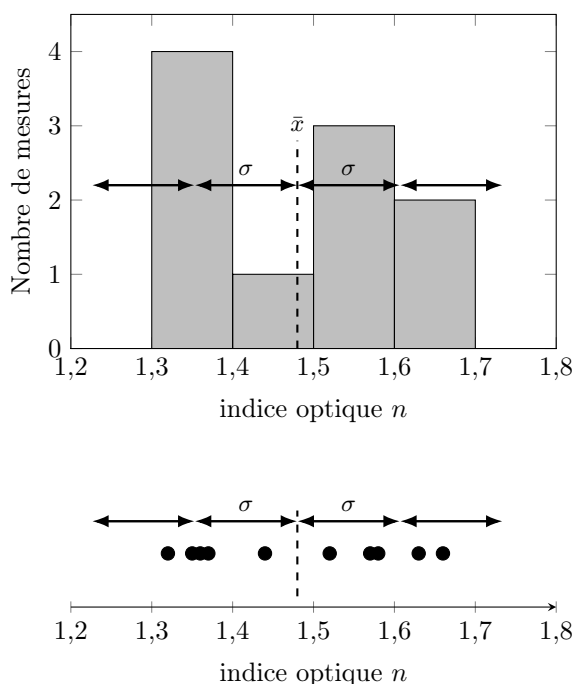
⇒ Supposons donc que la répétition de N mesures donne N valeurs $x_1, \dots, x_N$.

Exemple : en classe de 2nd, vous réalisez l'expérience de mesure de l'indice optique n d'un plexiglas transparent.

Ci-dessous les mesures réalisées par 10 groupes d'élèves :

Mesure de l'indice optique	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Valeur	1,63	1,44	1,32	1,57	1,36	1,52	1,58	1,66	1,35	1,37

Il est important de savoir lire un histogramme :



Hypothèse fondamentale

La valeur “vraie” de la grandeur mesurée se situe vers le centre des valeurs obtenues (pas de biais).

⇒ L'incertitude, donc le doute sur la valeur réelle de la grandeur, est quantifiée par la dispersion des valeurs obtenues.

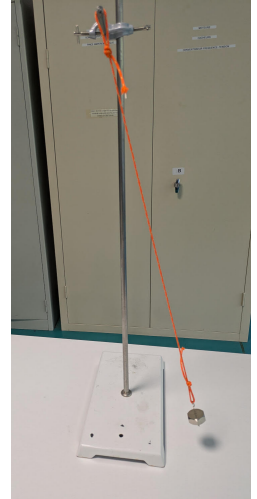
À vous de jouer

Expérience :



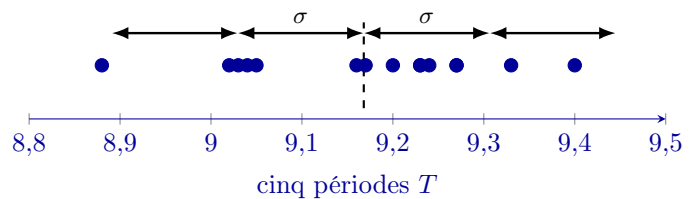
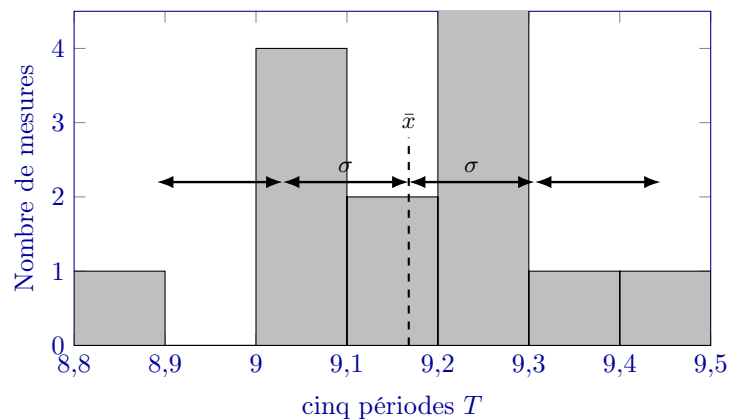
- Une longue ficelle avec une masse au bout constitue un **pendule**. Un seul pendule pour toute la classe.
- Vous disposez chacun d'un chronomètre.
- Vous allez, chacun, mesurer la durée des mêmes 10 oscillations du pendule.
- En déduire, chacun, la période T du pendule.

→ Mise en commun des résultats et tracés.



Après séance, résultats de la classe, pour la mesure de 5 périodes :

- $N = 15$ mesures,
- $\bar{T} = 9,17$ s
- Écart-type $\sigma = 0,14$ s
- $u(\bar{T}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0,036$ s $\approx 0,04$ s
- Histogramme ci-contre.



II.2 L'écart-type : un outil pour quantifier la variabilité

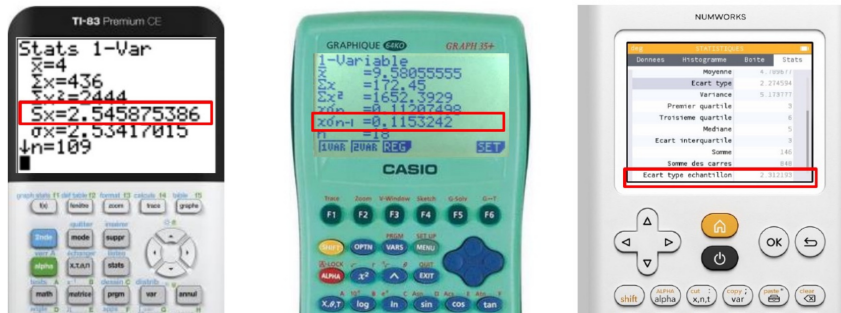


L'incertitude est donnée par la *dispersion* ou *l'étalement* des valeurs obtenues. Mais comment évaluer cette dispersion ?

En mathématiques, il existe un outil qui rend compte de la dispersion d'un ensemble de valeurs : c'est **l'écart-type**, noté σ (sigma). Sa définition est :

$$u(x) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Pour le calculer, le plus simple est de saisir les données dans la calculatrice (liste) ou sur l'ordinateur et d'utiliser les outils statistiques¹.



Exemples : ci-dessous, des exemples de valeurs x_i qui illustrent plusieurs lois de probabilité.

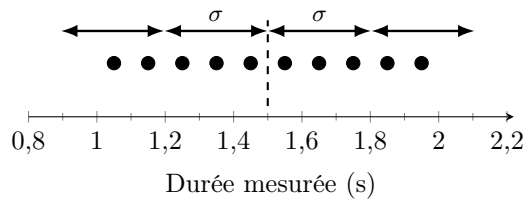
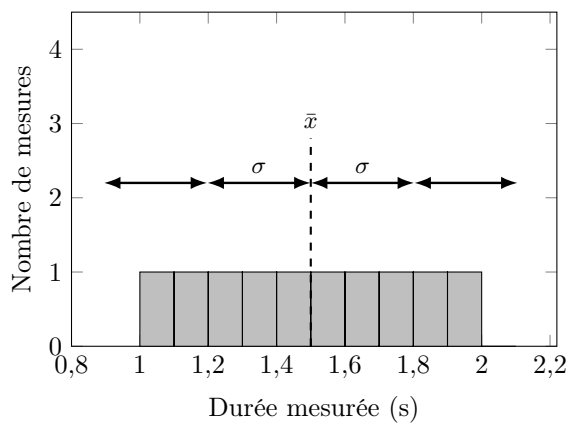
À chaque fois, tracé de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart-type σ .

Bien voir que :

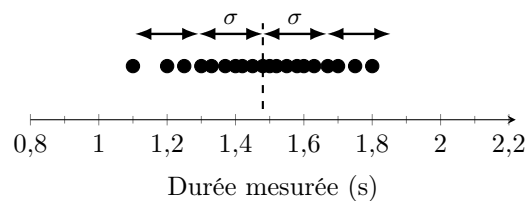
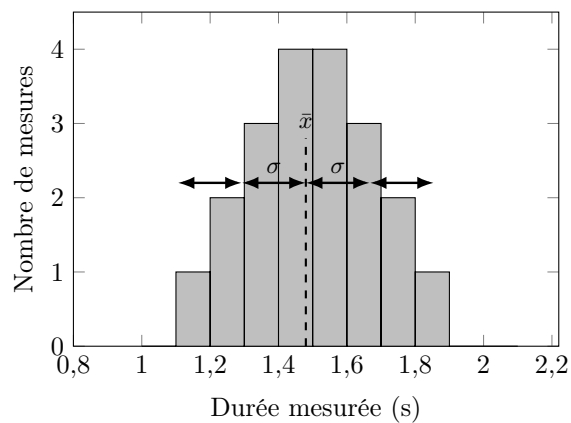
1. σ donne une idée de l'étalement des valeurs. → C'est bien l'outil adapté.
2. L'intervalle $\bar{x} \pm 2\sigma$ contient quasiment toutes les valeurs.

(ceci confirme le choix du facteur 2 de la partie I.1, à condition donc de poser $u = \sigma$.)

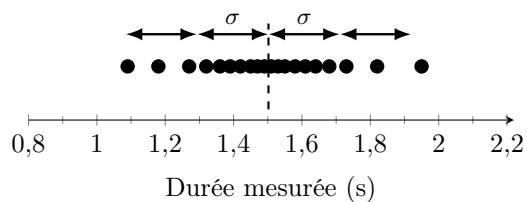
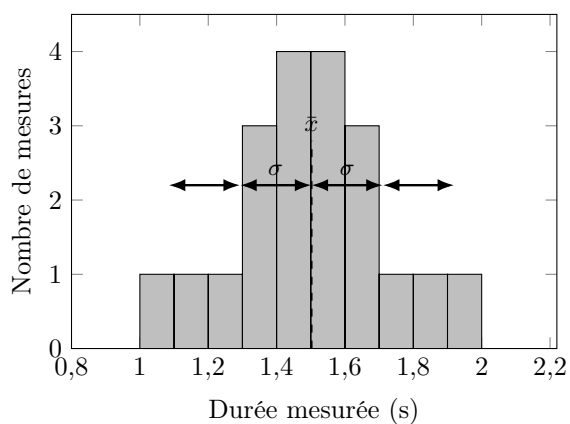
1. Sur calculatrice TI : symbole S_x , sur Casio : symbole $x\sigma n-1$, sur Numworks : **Ecart-type échantillon**. Sous Python, `np.std(liste, ddof=1)`, sous Excell, `=ECARTYPE()`. De manière générale, le symbole S_x est souvent utilisé pour ce σ_{n-1} . Il est appelé "écart-type expérimental" ou "de l'échantillon".



Loi uniforme (ou rectangle) : probabilité identique de trouver une valeur entre les bornes 1 s et 2 s.



Loi triangulaire : probabilité plus forte de trouver une valeur vers le centre de l'intervalle.



Loi normale (ou gaussienne) : probabilité forte de trouver les valeurs vers le centre de l'intervalle. L'intervalle n'est pas borné : on peut trouver des valeurs très loin (avec une probabilité faible).

II.3 Utilisation d'une seule valeur

Hypothèse fondamentale : la valeur réelle de la grandeur est proche du centre de la distribution des N valeurs.

Conséquence :

Incertitude-type sur une mesure

Si je fais une mesure, j'ai **une** valeur x_i .

Cette valeur est éloignée du centre d'au plus environ 2σ : son incertitude-type est donc la moitié ^a : $u(x_i) = \sigma$.

L'incertitude-type sur une valeur x_i est $u(x_i) = \sigma$,

avec σ l'écart-type calculé à partir de la série complète de mesures.

a. Par cohérence avec l'interprétation "les valeurs plausibles $\in [x \pm 2u(x)]$ " énoncée plus tôt.

Remarque : Il faut donc disposer de toute une série de mesures pour calculer σ et estimer $u(x_i)$. Nous verrons comment faire plus loin si on ne dispose pas d'autres mesures.

II.4 Mieux : utilisation des N valeurs, moyenne

À partir de la série de N mesures, on peut calculer la moyenne, souvent notée avec une barre :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

⇒ Si la variabilité est **aléatoire** (pas de biais), alors les différentes valeurs mesurées sont tantôt trop grandes, tantôt trop petites, par rapport à la "vraie" valeur.

Exemples : on remplit la fiole une fois avec 100,02 mL, une fois avec 99,96 mL... On appuie une fois trop tard sur le chronomètre, une fois trop tôt... On sur-estime parfois la longueur, puis la fois suivante on la sous-estime...

⇒ Ces erreurs **aléatoires** vont avoir tendance à se **compenser** lorsqu'on prend la moyenne. Ainsi :

Incertitude-type sur la moyenne

► Par rapport à une seule mesure, **la moyenne $\bar{x}$ donne une meilleure estimation** de la grandeur mesurée.

► ⇒ L'incertitude-type $u(\bar{x})$ associée à cette moyenne est **plus petite** que l'incertitude $u(x_i) = \sigma$ associée à une seule mesure.

Il y a une formule pour la calculer : $u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ avec N le nombre de mesures et σ l'écart-type de la série $(x_1, \dots, x_N)$.

⇒ $u(\bar{x})$ est l'incertitude-type associée à **la moyenne** des mesures.

Remarque : La démonstration utilise la formule fondamentale de propagation (1 page 16) (formule qui s'interprète elle aussi via la compensation partielle des erreurs aléatoires) :

$$u^2(\bar{x}) = u^2 \left(\frac{1}{N} (x_1 + \dots + x_N) \right) = \frac{1}{N^2} (u^2(x_1) + \dots + u^2(x_N)) = \frac{1}{N^2} (\sigma^2 + \dots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{N}, \text{ donc } u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Exemple : exploitation de vos mesures de la période T du pendule :

Nombre de mesures N	Moyenne $\bar{T}$	Écart-type σ	Incertitude-type $u(\bar{x}) = \sigma/\sqrt{N}$

Écriture finale du résultat $(\bar{x} \pm 2u(\bar{x}))$:

II.5 Les limites de l'estimation de l'incertitude via la variabilité

Limite fondamentale

Seules les erreurs aléatoires se compensent : toute source d'erreur **systématique** ne sera pas réduite par répétition. “Systématique” signifie “toujours pareil” : par exemple, la mesure est toujours trop basse. On parle aussi de **biais**.
⇒ Le calcul de σ et donc de $\sigma/\sqrt{N}$ ne prend pas en compte les erreurs systématiques.

Exemples :

- ▶ Chronomètre : le temps de réponse d'un être humain n'est pas nul, il y a systématiquement un retard.
- ▶ Titrage colorimétrique : l'opérateur a tendance à dépasser un peu l'équivalence pour bien voir le changement de couleur.

Les erreurs systématiques proviennent également des sources potentielles de variabilité, mais qui ne sont “pas actives” dans les répétitions.

Exemples :

- ▶ Utilisation d'un même appareil de mesure (toujours la même balance, le même voltmètre, la même fiole, la même burette...). Cet appareil a nécessairement un biais, qui n'apparaît pas par répétitions.
- ▶ Utilisation du même étalon : en chimie, la solution titrante n'est pas changée entre les différents essais. Tous les groupes ont la même. Or il y a bien une incertitude (un doute) sur sa valeur.

III Comment estimer $u(x)$ lorsqu'on ne répète pas la mesure (type B) _____

Il est parfois impossible, ou pénible, de répéter la mesure, qui plus est en activant toutes les sources de variabilité (changer tous les appareils!).

On réalise alors une seule mesure. La procédure générale est la suivante :

Incertitude de type B (sans répéter la mesure)

- ▶ On estime la plus petite **plage** dans laquelle on est **presque certain de trouver la valeur recherchée**.
- ▶ On l'écrit sous la forme $[x - \Delta(x), x + \Delta(x)]$.
- ▶ $\Delta(x)$ peut être appelée “demi-étendue d'incertitude”.
- ▶ L'incertitude-type de la mesure est $u(x) \approx \frac{\Delta}{2}$.

Remarque : le facteur 2 est cohérent avec l'interprétation de $u(x)$ donnée en début de cours, à savoir que $[x \pm 2u(x)]$ contient les valeurs les plus plausibles : on identifie ainsi que $\Delta(x) = 2u(x)$.

Remarque pour aller plus loin : le lien entre u et Δ n'est pas toujours $u = \Delta/2$. Il dépend de l'hypothèse que l'on effectue sur la probabilité de trouver la valeur “vraie” de la grandeur entre $x - \Delta$ et $x + \Delta$.

- Si on suppose cette probabilité uniforme (aucun endroit privilégié dans $[x \pm \Delta]$), alors on prouve que l'écart-type u est lié à Δ par $u = \Delta/\sqrt{3} = \Delta/1,73$. Vous rencontrerez parfois ce choix.
- Si on suppose que la valeur vraie a davantage de chances de se trouver au centre de l'intervalle $[x \pm \Delta]$, alors on peut choisir une loi de probabilité triangulaire (comme l'histogramme plus haut). On montre alors que l'écart-type est $u = \Delta/\sqrt{6} = \Delta/2,45$.
- Le choix $u = \Delta/2$ correspond donc à un choix de distribution de probabilité intermédiaire entre la loi uniforme et la loi triangulaire.

III.1 Exemple 1 : instruments gradués

Ceci concerne : règle graduée, mètre, vernier de pied à coulisse, règle de banc optique, etc.

Estimation de Δ

On estime la plage de valeurs plausibles $x \pm \Delta$. On a donc logiquement :

$$\Delta = \text{une demi-graduation ou une graduation.}$$

Prendre une demi-graduation suppose un objet très bien délimité et un grand soin dans la lecture. Dans les autres cas, prendre une graduation est raisonnable.

Toutefois, s'il y a un doute sur les positions de début et de fin, on peut prendre Δ plus grand encore.

Exemple : règle graduée. On mesure 3,4 cm avec une règle graduée au mm. On prend $\Delta = 1 \text{ mm}/2 = 0,5 \text{ mm}$, et donc $u(L) = \Delta/2 = 0,25 \text{ mm}$.

Attention : l'objet ou la position à mesurer n'est parfois pas "net". En optique, le point O est le centre de la lentille et n'est pas positionné à mieux que 1 mm. En optique encore, la position qui donne une image nette est parfois incertaine. Le point d'accroche de la ficelle d'un pendule ou le repérage du centre de la masse ne se font pas à 0,5 mm près. Etc. Dans tous ces cas, on estime un encadrement raisonnable $x \pm \Delta$, puis on prend $u = \Delta/2$.

III.2 Exemple 2 : verrerie graduée (éprouvette, burette, pipette)

Estimation de Δ

Δ = une demi-graduation ou une graduation, en fonction du soin apporté à la lecture.

Éprouvette graduée de mL en mL : on peut prendre $\Delta = 0,5 \text{ mL}$.

III.3 Exemple 3 : utilisation d'un appareil numérique

La valeur affichée par un appareil numérique n'est jamais certaine. Il convient de consulter la **notice**, pour voir comment calculer l'incertitude-type.

Exemples : voltmètre, amperemètre, pH-mètre, balance, thermomètre numérique, ...

Estimation de Δ

- En pratique, la notice permet souvent de calculer l'erreur maximale tolérée (EMT), que l'on notera Δ .
- Soit x la valeur affichée par l'appareil.
- On estime que la valeur vraie se situe dans l'intervalle $x \pm \Delta$, et donc que $u(x) = \Delta/2$.

Attention : ne pas confondre la résolution de l'appareil (variation du dernier chiffre affiché) et son incertitude. L'incertitude est souvent supérieure. Par exemple, un voltmètre qui affiche 1,234 V n'a pas une incertitude-type ni un EMT de 0,001 V, mais plutôt typiquement de 0,005 V.



FIGURE 7 – Gauche : ces ampermètres en série indiquent entre 100,7 mA et 101,1 mA, ce qui est compatible avec les écarts déduits de la notice ($\Delta_{\text{notice}} = 0,3 \% + 2d = 0,5 \text{ mA}$ et les valeurs affichées sont dans une plage de 2Δ). Ainsi, si on dispose d'un seul amperemètre, on lit la valeur de I et on utilise $u(I) = \Delta_{\text{notice}}/2 = 0,25 \text{ mA}$, ce qui donne bien une bonne estimation. **Droite :** ces pressiomètres indiquent entre 990 hPa et 1009 hPa, ce qui est compatible avec les écarts notice ($\Delta_{\text{notice}} = 2 \% \times 1000 = 20 \text{ hPa}$), sauf pour l'appareil qui indique 1117 hPa et qui doit être ré-étalonné. Si on dispose d'un seul appareil, on lit la valeur de p et on utilise $u(p) = \Delta_{\text{notice}}/2$, ce qui donne une bonne estimation (sauf pour celui qui est défectueux !). **Autres exemples :** balances figure 1 (les écarts sont anormaux), voltmètres figure 2 (écarts normaux).

III.4 Exemple 4 : verrerie jaugée

Estimation de Δ

La tolérance Δ indiquée sur l'instrument sert de demi-étendue d'incertitude sur $V_{\text{instrument}}$. On est quasi-certain que le volume réel de la verrerie est dans l'intervalle $V \pm \Delta$. On en déduit $u(V_{\text{instrument}}) = \frac{\Delta}{2}$.

Attention : ceci ne dit rien sur les inévitables erreurs de remplissage faites par l'opérateur.

Exemple :

Prenons l'exemple d'une fiole jaugée de 50 mL.

Le fabricant indique également une **tolérance** sur la fiole : $\pm 0,06$ mL. Ceci signifie que le volume des fioles qu'il fabrique est compris dans l'intervalle $(50 \pm 0,06)$ mL, donc que :

$$49,94 \text{ mL} \leq V_{\text{fiole}} \leq 50,06 \text{ mL}.$$

On en déduit :

$$u(V_{\text{fiole}}) = \frac{\Delta_{\text{fiole}}}{2} = 0,03 \text{ mL}.$$

Attention : ceci donne l'incertitude sur le volume réel de la fiole, si elle est remplie exactement au trait de jauge. Or, même un professionnel ne parvient pas à cela parfaitement. Il doit donc s'ajouter une incertitude liée à l'opérateur qui manipule de façon variable. L'histogramme ci-dessous est le résultat de 74 remplissages de fioles par des élèves. L'écart-type est $\sigma = 0,15$ mL, et il serait souhaitable de prendre ceci comme incertitude-type.

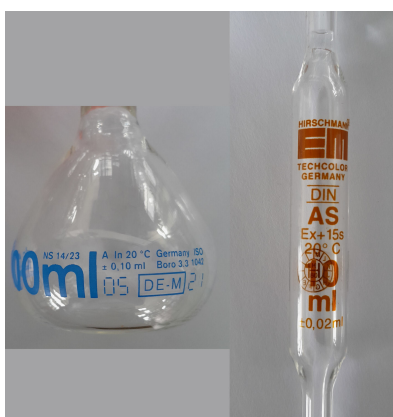
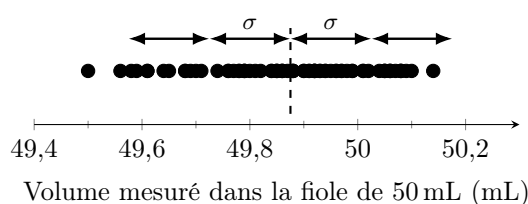
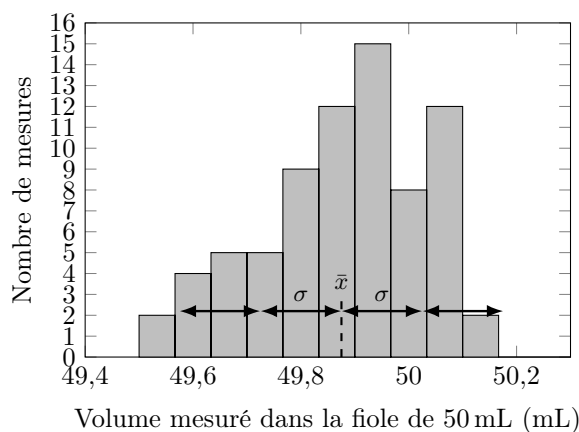


FIGURE 8 – Une fiole et une pipette jaugée. On y lit les tolérances $\Delta = 0,1$ mL (fiole) et $\Delta = 0,02$ mL.

IV Comparaison de deux mesures



En sciences, on cherche souvent à savoir si le résultat d'une mesure est **compatible** avec une valeur de référence. Ou si elle dépasse un seuil. Voyons comment.

Rappel : nous avons expliqué l'interprétation de $u(x)$: $x \pm 2 \times u(x)$ donne l'intervalle de valeurs probables.

⇒ La valeur mesurée est compatible avec celle référence lorsque $x_{\text{réf}} \in [x \pm 2u(x)]$.

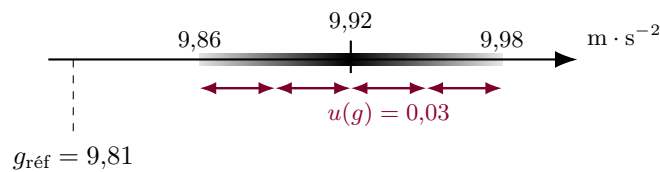
Exemple : on mesure la pesanteur $g = 9,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ avec $u(g) = 0,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La valeur de référence est $g_{\text{réf}} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La mesure réalisée est-elle compatible ?

On a : $2u(g) = 0,06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, donc la mesure estime que $g = 9,92 \pm 0,06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, donc que $g \in [9,86, 9,98] \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

⇒ $g_{\text{réf}}$ n'est pas dedans, la mesure n'est donc **pas compatible**.



On définit l'**écart normalisé** (parfois appelé z-score) :

$$z = \frac{|x - x_{\text{réf}}|}{u(x)}.$$

Propriété :

$$x_{\text{réf}} \in [x - 2u(x), x + 2u(x)] \Leftrightarrow z = \frac{|x - x_{\text{réf}}|}{u(x)} \leq 2.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} x_{\text{réf}} \in [x - 2u(x), x + 2u(x)] &\Leftrightarrow x - 2u(x) \leq x_{\text{réf}} \leq x + 2u(x) \\ &\Leftrightarrow -2u(x) \leq x_{\text{réf}} - x \leq 2u(x) \\ &\Leftrightarrow |x_{\text{réf}} - x| \leq 2u(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{|x - x_{\text{réf}}|}{u(x)} \leq 2. \end{aligned}$$

⇒ la valeur de z compte la distance entre x et $x_{\text{réf}}$ en nombre de fois $u(x)$. Par exemple, si $z = 3$, alors il y a 3 fois $u(x)$ entre x et $x_{\text{réf}}$.

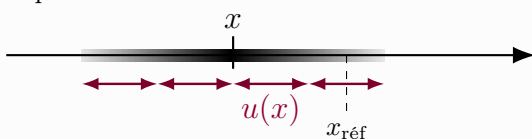
On arrive donc à plusieurs façons équivalentes d'écrire le critère de compatibilité :

Compatibilité entre une mesure et une référence

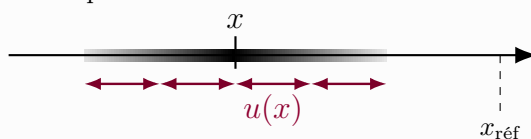
x et $x_{\text{réf}}$ sont compatibles lorsque :

$$x_{\text{réf}} \in [x - 2u(x), x + 2u(x)], \text{ ce qui s'écrit aussi : } z = \frac{|x - x_{\text{réf}}|}{u(x)} \leq 2.$$

Compatibles :

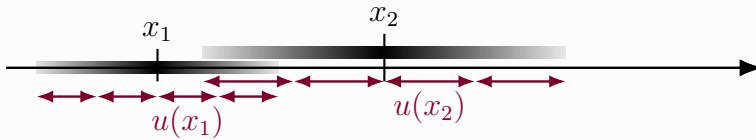


Non compatibles :



Compatibilité entre deux mesures

Dans le cas de la comparaison de deux mesures, il faut tester si les intervalles de valeurs plausibles se recoupent.



Le critère s'écrit donc :

$$x_1 \text{ et } x_2 \text{ compatibles} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| \leq 2(u(x_1) + u(x_2)) \Leftrightarrow z = \frac{|x_1 - x_2|}{u(x_1) + u(x_2)} \leq 2.$$

Remarques :

- Le seuil de 2 est parfois considéré comme trop strict, et on rencontre aussi le critère avec un “3” à la place du “2”.
- Pour la comparaison de x_1 et x_2 , la formule rigoureuse utilise $u(x_1 - x_2) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$ au dénominateur de z , à la place de $u(x_1) + u(x_2)$. Ceci ne change pas grand chose.

En cas de non compatibilité, on peut se demander :

- Y a-t-il eu des erreurs fautives (mauvaises manipulations, erreur de calcul...)?
- Le modèle théorique utilisé est-il mis en défaut?
- N'a-t-on pas sous-estimé $u(x)$?

V À vous de jouer

Principe :

- On sépare la classe en deux groupes.
- Chaque groupe dispose du matériel suivant :

- une balance,
- un multimètre,
- un mètre,
- des notices simplifiées pour la balance et le multimètre,
- un tableur Libre Office sur ordinateur.



- Il y a, pour toute la classe :
 - une masse d'environ 100 g,
 - une résistance d'environ 100 Ω ,
 - le pendule (masse+ficelle) utilisé plus tôt.

Chaque groupe représente un laboratoire : labo 1, labo 2.



Chaque laboratoire doit mesurer la masse m , la résistance R , la longueur L du pendule, la période T du pendule.

Mesurer signifie : donner la valeur, ainsi que l'incertitude-type associée.

Ensuite, nous comparerons les valeur des deux groupes pour voir si elles sont compatibles.

La masse m

Votre laboratoire :

Valeur m	$u(m)$	Écriture $m \pm 2u(m)$

L'autre laboratoire :

Valeur m	$u(m)$	Écriture $m \pm 2u(m)$

Conclusion : votre laboratoire est-il d'accord avec l'autre ?

La résistance R

Votre laboratoire :

Valeur R	$u(R)$	Écriture $R \pm 2u(R)$

L'autre laboratoire :

Valeur R	$u(R)$	Écriture $R \pm 2u(R)$

Conclusion : votre laboratoire est-il d'accord avec l'autre ?

La longueur L du fil du pendule

Votre laboratoire :

Valeur L	$u(L)$	Écriture $L \pm 2u(L)$

L'autre laboratoire :

Valeur L	$u(L)$	Écriture $L \pm 2u(L)$

Conclusion : votre laboratoire est-il d'accord avec l'autre ?

La période T du pendule

Vous avez déjà réalisé la mesure de T . Vous disposez d'une mesure par personne, donc d'une série de N valeurs : il faut en faire la moyenne et l'écart-type. Vous pouvez utiliser l'ordinateur.

Votre laboratoire :

Moyenne des valeurs individuelles $\bar{T}$	Écart-type σ	Incertitude-type $u(\bar{T})$	Écriture $\bar{T} \pm 2u(\bar{T})$

L'autre laboratoire :

Valeur $\bar{T}$	$u(\bar{T})$	Écriture $\bar{T} \pm 2u(\bar{T})$

Conclusion : votre laboratoire est-il d'accord avec l'autre ?

Mesure de la pesanteur g

La mesure de L et de T permet une mesure de la pesanteur g .

En effet, nous avons vu la dernière fois qu'une modélisation simple du pendule permet d'obtenir la relation :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \text{et donc} \quad \boxed{g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}}.$$

Votre laboratoire :

Valeur calculée $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$	Incertitude-type $u(g)$	Écriture $\bar{g} \pm 2u(g)$

Remarque : pour calculer $u(g)$, consulter la partie [VI](#).

Conclusion : votre mesure est-elle compatible avec la valeur de référence $g_{\text{réf}} = 9,81 \text{ m s}^{-2}$?

Résumé des résultats de la séance :

- 4 "labos".
- Résultats des mesures de R , de L et de T compatibles.
- Résultats tout juste non compatibles avec les balances. Certaines sont donc à re-étalonner.
- Mesures de g en accord avec $g_{\text{réf}}$.

	Labo noir	Labo rouge	Labo bleu	Labo vert
$g_{\text{réf}} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ Masse m $\Delta = 0,06 \text{ g}$ (notice)	$g = 10,12 \text{ m.s}^{-2}$ $m = 99,82 \text{ g}$ $u(m) = 0,03 \text{ g}$ $m \pm 2u(m) = 99,82 \pm 0,06 \text{ g}$ $= [99,76; 99,88] \text{ g}$	$g = 10,23 \text{ m.s}^{-2}$ $m = 99,99 \text{ g}$ $u(m) = 0,03 \text{ g}$ $m \pm 2u(m) = 99,99 \pm 0,06 \text{ g}$ $= [99,93; 100,05] \text{ g}$	$g = 9,95 \text{ m.s}^{-2}$ $m = 99,99 \text{ g}$ $u(m) = 0,03 \text{ g}$ $m \pm 2u(m) = 99,99 \pm 0,06 \text{ g}$ $= [99,88; 100,00] \text{ g}$	$g = 10,28 \text{ m.s}^{-2}$ $m = 99,77 \text{ g}$ $u(m) = 0,03 \text{ g}$ $m \pm 2u(m) = 99,77 \pm 0,06 \text{ g}$ $= [99,71; 99,83] \text{ g}$
Résistance R $\Delta = 1,3 \Omega$ (notice)	$R = 101,6 \Omega$ $u(R) = 0,65 \Omega$ $R \pm 2u(R) = 101,6 \pm 1,3 \Omega$	$R = 100,6 \Omega$ $u(R) = 0,65 \Omega$ $R \pm 2u(R) = 100,6 \pm 1,3 \Omega$	$R = 101,9 \Omega$ $u(R) = 0,65 \Omega$ $R \pm 2u(R) = 101,9 \pm 1,3 \Omega$	$R = 102,0 \Omega$ $u(R) = 0,65 \Omega$ $R \pm 2u(R) = 102,0 \pm 1,3 \Omega$
Longueur L	$L = 86 \text{ cm}$ $u(L) = 0,2 \text{ cm}$ $L \pm 2u(L) = 86 \pm 0,4 \text{ cm}$	$L = 86,6 \text{ cm}$ $u(L) = 0,2 \text{ cm}$ $L \pm 2u(L) = 86,6 \pm 0,4 \text{ cm}$	$L = 86,5 \text{ cm}$ $u(L) = 0,2 \text{ cm}$ $L \pm 2u(L) = 86,5 \pm 0,4 \text{ cm}$	$L = 86,1 \text{ cm}$ $u(L) = 0,2 \text{ cm}$ $L \pm 2u(L) = 86,1 \pm 0,4 \text{ cm}$
Période T	$T = 9,156 \text{ s}$ $u(T) = 0,08 \text{ s}$ $T \pm 2u(T) = 9,156 \pm 0,16 \text{ s}$ $N = 5$	$T = 9,14 \text{ s}$ $u(T) = 0,146 \text{ s}$ $T \pm 2u(T) = 9,14 \pm 0,146 \text{ s}$ $N = 3$	$T = 9,26 \text{ s}$ $u(T) = 0,055 \text{ s}$ $T \pm 2u(T) = 9,26 \pm 0,11 \text{ s}$ $N = 4$	$T = 9,09 \text{ s}$ $u(T) = 0,046 \text{ s}$ $T \pm 2u(T) = 9,09 \pm 0,092 \text{ s}$ $N = 3$

VI Propagation de l'incertitude

Dans le cas d'une grandeur calculée à partir de grandeurs mesurées, par exemple :

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

le doute sur les grandeurs mesurées (ici T et L) se répercute en un doute sur la grandeur calculée (ici g).

On parle de **propagation de l'incertitude**.

VI.1 Formule fondamentale

Il existe des formules (admisses à votre niveau), ou bien des méthodes par simulation et tirage au sort. Dans ce cours, nous utilisons une méthode équivalente qui part de la formule fondamentale d'additivité des u^2 .

Une première formule est celle de multiplication par un réel. Si on multiplie toutes les valeurs x_i par un facteur 2 (par exemple), alors la moyenne et la dispersion des valeurs sont aussi multipliées par 2. Ainsi :

Formule de multiplication

Si a est un réel et x une grandeur mesurée, alors $u(a \times x) = |a| \times u(x)$.

La seconde formule, moins évidente, est la suivante :

Formule fondamentale de propagation (non additivité des incertitudes)

- Soit x_1 et x_2 deux grandeurs mesurées, dont les incertitudes-types sont $u(x_1)$ et $u(x_2)$.
- Soit la grandeur calculée $y = x_1 + x_2$.

Le doute sur les valeurs de x_1 et de x_2 se répercute en un doute sur la valeur de la somme, avec la formule :

$$u(x_1 + x_2)^2 = u(x_1)^2 + u(x_2)^2, \quad \text{soit aussi : } u(x_1 + x_2) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}. \quad (1)$$

Remarque : x_1 et x_2 doivent être indépendants pour que cette formule s'applique, au sens où le résultat de la mesure de x_1 n'a pas d'influence sur celui de la mesure de x_2 .

Interprétation : il est important de comprendre pourquoi on n'a **pas additivité** des incertitudes :

$$u(x_1 + x_2) \neq u(x_1) + u(x_2).$$

En effet, on ne se trompe pas toujours par excès sur x_1 et sur x_2 en même temps. On va parfois sur-estimer x_1 et sous-estimer x_2 , ce qui donne une erreur sur $x_1 + x_2$ qui est moindre. On a donc

$$u(x_1 + x_2) < u(x_1) + u(x_2), \quad \text{car il y a compensation partielle des erreurs.}$$

Exemple : si $u(x_1) = u(x_2)$, que l'on note u , alors la formule correcte donne $u(x_1 + x_2) = \sqrt{u^2 + u^2} = \sqrt{2} u = 1,41 u$, ce qui est inférieur à $2 u$.

On peut prouver que ce sont en fait les carrés des incertitudes qui s'ajoutent. Cette formule est mieux justifiée plus loin. Voyons d'abord comment l'utiliser pour propager une incertitude sur une grandeur calculée quelconque.

VI.2 Propagation sur une grandeur calculée quelconque

Prenons à nouveau l'exemple de $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$.

- si T varie de $u(T)$, alors $g(T)$ devient $g(T + u(T))$. Il a varié de $u(g)_T = g(T + u(T)) - g(T)$.
- si L varie de $u(L)$, alors $g(L)$ devient $g(L + u(L))$. Il a varié de $u(g)_L = g(L + u(L)) - g(L)$.

Au total, si T et L varient de $u(T)$ et de $u(L)$, alors g varie de $u(g)_L + u(g)_T$.

Ceci laisse penser que $u(g)$ est la somme de ces variations possibles : $u(g) = u(g)_L + u(g)_T$.

MAIS les variations ou les erreurs ne vont pas toujours dans le même sens. Pour la même raison que $u(x_1 + x_2) \neq u(x_1) + u(x_2)$, on a ici aussi :

$$u(g)^2 = u(g)_L^2 + u(g)_T^2.$$

Cette méthode se généralise à n'importe quelle grandeur calculée.



Avec vos mesures, compléter les tableaux suivants afin de calculer votre $u(g)$.

Correction : données du groupe bleu ci-dessus, $5\bar{T} = 9,26 \text{ s}$ et $u(5\bar{T}) = 0,055 \text{ s}$, donc $\bar{T} = 1,85 \text{ s}$ et $u(\bar{T}) = 0,011 \text{ s}$, ainsi que $L = 86,5 \text{ cm}$ et $u(L) = 0,2 \text{ cm}$.

Incertitude sur g due à l'incertitude sur L		
Valeur centrale $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$	Valeur extrême $g' = \frac{4\pi^2 (L + u(L))}{T^2}$	Incertitude $u(g)_L = g' - g$
$9,95 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$9,97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$0,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Incertitude sur g due à l'incertitude sur T		
Valeur centrale $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$	Valeur extrême $g' = \frac{4\pi^2 L}{(T + u(T))^2}$	Incertitude $u(g)_T = g' - g$
$9,95 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Conclusion, incertitude-type complète sur g :

$$u(g) = \sqrt{u(g)_L^2 + u(g)_T^2} =$$

Groupe bleu : on obtient $u(g) = 0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Donc $g = (9,95 \pm 0,24) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, compatible avec $g_{\text{réf}} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Tous les groupes ont un résultat compatible avec $g_{\text{réf}}$ (cf photographie du tableau).

VI.3 Justification de la formule fondamentale

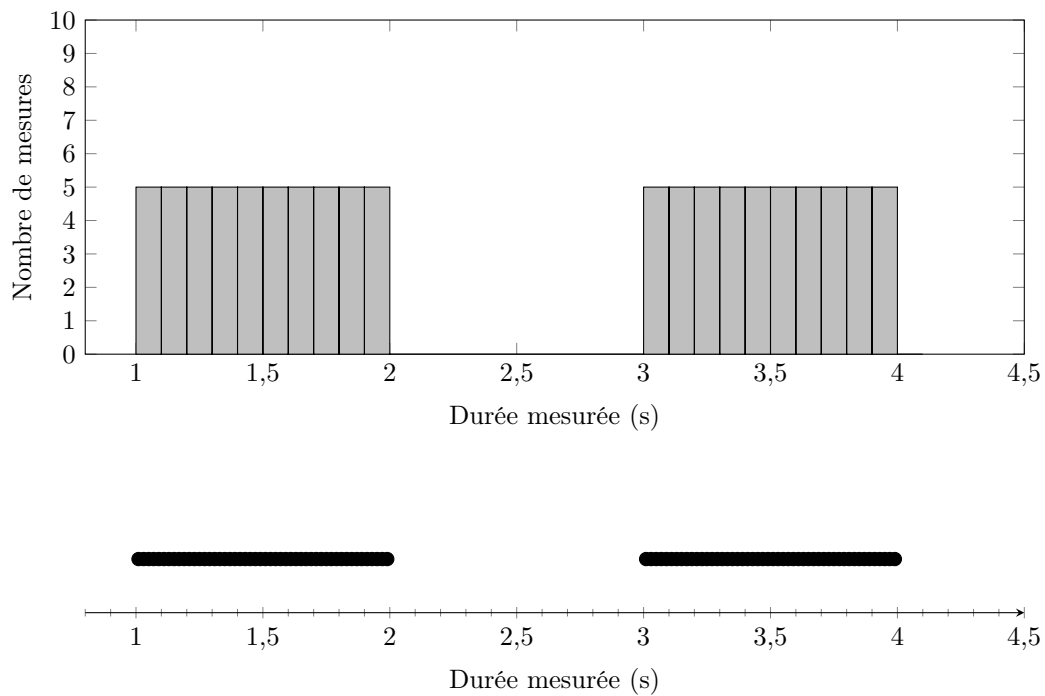
Revenons sur la formule :

$$u(x_1 + x_2)^2 = u(x_1)^2 + u(x_2)^2.$$

En mathématiques, il s'agit de la formule d'additivité des variances de deux variables aléatoires indépendantes.

À défaut de pouvoir la prouver à votre niveau (même si cela peut être fait dans un cours de mathématiques), illustrons-là sur un exemple simple. On considère :

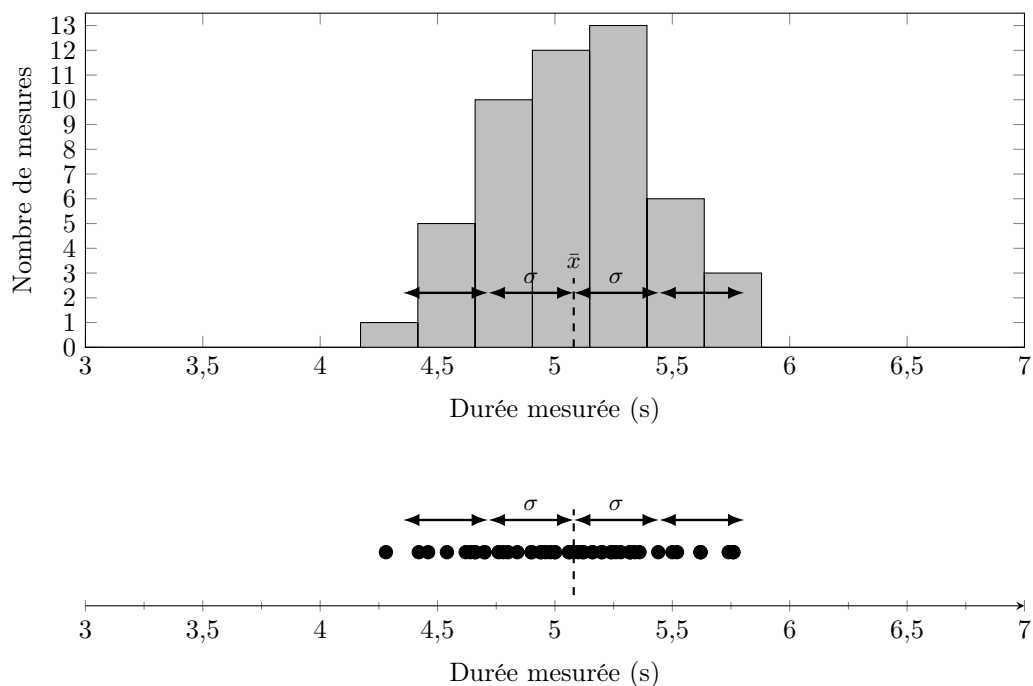
- Une mesure x_1 , répétée 50 fois, dont les résultats sont uniformément répartis entre 1 et 2.
La moyenne est $\bar{x}_1 = 1,5$ et l'écart-type $u(x_1) = 0,3$.
- Une mesure x_2 , répétée 50 fois, dont les résultats sont uniformément répartis entre 3 et 4.
La moyenne est $\bar{x}_2 = 3,5$ et l'écart-type $u(x_2) = 0,3$.



On tire au sort une valeur de x_1 et une valeur de x_2 , et on les somme.

On répète ceci 50 fois pour obtenir 50 valeurs de $x_1 + x_2$.

On obtient les graphiques suivants :



On constate que :

- La moyenne de $x_1 + x_2$ est proche de $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 5$, ce qui est attendu.
- La distribution de $x_1 + x_2$ n'est pas uniforme.

Les valeurs extrêmes sont plus rarement obtenues que les valeurs centrales.

Ceci se comprend : pour obtenir 4, il faut tirer à la fois la plus petite valeur de x_1 et la plus petite valeur de x_2 .

De même pour obtenir 6 : il faut tirer la plus grande valeur de x_1 en même temps que la plus grande de x_2 .

Une analogie avec le lancer de deux dés à six faces, dont on somme les résultats : on obtient plus rarement 2 et 12 que 5 ou 6 ou 7.

- L'écart-type est donc moins grand que si la distribution de $x_1 + x_2$ était uniforme entre 4 et 6.

Elle est "triangulaire", son écart-type est $u(x_1 + x_2) = 0,4$, égal à $\sqrt{0,3^2 + 0,3^2}$.