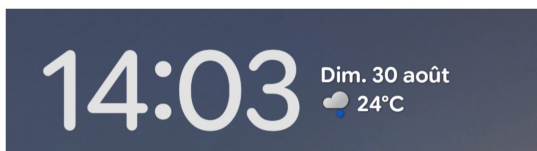


Unités et homogénéité

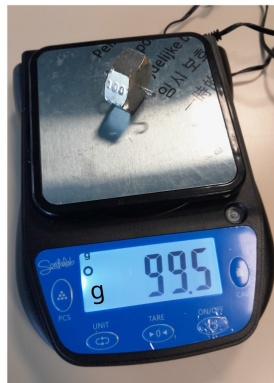
Objectifs : ce qu'il faut connaître et savoir faire

- Quelles sont les sept unités de base du système international (SI) ?
- Connaître des noms d'unités dérivées cohérentes, comme le pascal, le newton, le joule, le watt... et savoir les exprimer en fonction des unités de base.
- Déterminer l'unité d'une grandeur dans le système international.
- Réaliser une application numérique avec les unités adaptées.
- Vérifier si une formule est homogène.
- Déterminer l'expression possible d'une grandeur par analyse dimensionnelle.

I Grandeurs physiques et mesures, rôle des unités



heure, date, température



balance de cuisine



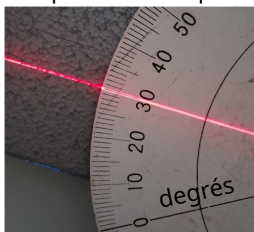
ohmmètre



burette de laboratoire



pression des pneus



compteur de voiture



boisson



tension chez le médecin



boîte d'ampoule



70 quoi ?

$$\Rightarrow p(H) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{V_0 - \sum w_i}{V_0} \right)^2 \quad \text{PAS HOMOGÈNE}$$

$$m = 12,3 \quad \text{Unité?}$$

copies d'élève

Définition

Grandeur physique : c'est une propriété d'un objet, d'un phénomène, d'un évènement, que l'on peut exprimer par une mesure.

Exemples : la position, la vitesse, la pression, la température, la masse, la charge électrique, une force...

Définition

Mesure : attribution, à une grandeur physique, d'une valeur numérique et d'une unité.

Exemple : longueur d'une table, $L = 122 \text{ cm}$.

$\Rightarrow L$ est la répétition de 122 fois l'unité "cm" (centimètre).

Ceci permet de connaître L .

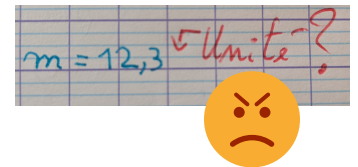
La valeur numérique (ici 122) dépend de l'unité.

$$L = 122 \text{ cm} = 1,22 \text{ m} = 48,0 \text{ pouce} = 4,00 \text{ pied}.$$

$\Rightarrow$ Écrire $L = 122$ ne permet pas de savoir ce que mesure L : est-ce 122 mètres ? centimètres ? pouces ? pieds ?

$\Rightarrow$ L'écriture d'un résultat numérique sans unité n'a aucun sens.

$\Rightarrow$ On n'oubliera jamais de noter l'unité d'un résultat numérique.



II Des unités utilisées dans le monde entier : le SI

II.1 Unités de base

Il est nécessaire, pour le bon déroulement des échanges techniques, commerciaux, scientifiques ou légaux, que les unités de mesure soient définies de la même façon partout. Un mètre doit valoir la même chose en France et en Australie. C'est le **Système International d'unités** (ou **SI**) qui est utilisé partout. Il définit sept unités de base, listées ci-dessous.

Grandeur de base	Notation pour la dimension	Unité de base
Durée (ou temps)	T	seconde (s)
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Intensité électrique	I	ampère (A)
Température thermodynamique	Θ	kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

Notation

On note entre crochets l'unité d'une grandeur.

Exemple : si l est une longueur et si m_0 est une masse :

$$[l] = \text{m} \quad \text{et} \quad [m_0] = \text{kg}.$$

Remarque :

- En toute rigueur, la dimension et l'unité de base sont deux choses différentes.

Exemple : si L est la largeur d'une table, la dimension de L est celle d'une longueur, et son unité est le mètre.

On note : $\dim(L) = L$ et $[L] = m$ (mètre).

Il est **équivalent** de raisonner avec les unités de base ou avec les dimensions de base. Dans toute la suite, nous raisonnons avec les **unités**.

- Attention, l'unité de base de la masse est le **kilogramme**, et non pas le **gramme**.
- L'intensité lumineuse est une mesure de l'intensité perçue par un œil humain standard. On la retrouve sur les emballages d'ampoules électriques.

II.2 Grandeurs sans unités

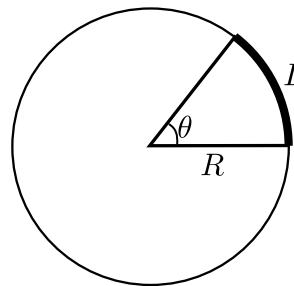
Certaines grandeurs physique sont d'unité 1 (on dit aussi "sans unité").

Exemples :

- Un nombre. Par exemple un nombre N d'atomes : $N = 10$, $N = 100$, $N = 6,02 \times 10^{23}$, ...
- Un rapport de grandeurs du même type. Par exemple le rapport $\alpha = L/L_0$ où L et L_0 sont deux longueurs.
- Les angles sont des grandeurs d'unité 1, car l'angle θ est défini comme le rapport $\theta = R/L$ (cf schéma, c'est la généralisation de la formule bien connue $2\pi = \text{circonférence}/R$). Donc

$$1 \text{ rad} = 1,$$

mais on précise tout de même l'unité radian pour rappeler qu'on a mesuré un angle.



$$\theta = \frac{L}{R} \Rightarrow [\theta] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{m}{m} = 1$$

$$\text{ex. : } \theta = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ (radians)}$$

II.3 Unités dérivées

Les unités des grandeurs qui ne sont pas une des 7 grandeurs de base doivent être obtenues **en utilisant des relations physiques**.

Exemple : pour une vitesse, on peut utiliser la relation $v = \frac{d}{t}$.

En terme d'unités de base du SI, on a donc : $[v] = \frac{[d]}{[t]} = \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$.

→ De même, établir l'unité des grandeurs suivantes en fonction des unités de base du SI :

– Volume V : $V = L^3$ donc $[V] = [L]^3 = m^3$.

– Surface S : $S = L^2$ donc $[S] = [L]^2 = m^2$.

– Masse volumique ρ : $\rho = \frac{m}{V}$ donc $[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{kg}{m^3} = kg \cdot m^{-3}$.

– Accélération a : $a = \frac{dv}{dt}$ donc $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{m \cdot s^{-1}}{s} = m \cdot s^{-2}$.

- Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ donc $[E_c] = \left[\frac{1}{2}\right] [m][v]^2 = 1 \cdot \text{kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Remarque : le $1/2$ ne compte pas, c'est un nombre sans unité.

Remarque : on arrive au même résultat en utilisant d'autres formules, comme $E = mc^2$ ou $E_p = mgz$, etc.

- Force F : $\vec{F} = m\vec{a}$ donc (on enlève les vecteurs) $[F] = [m][a] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Unités dérivées au nom spécial

Un produit d'unités de base, comme $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, est appelé une unité dérivée.

Certaines unités dérivées ont reçu un nom spécial, qui sert de raccourci et qui est bien pratique.

Exemples d'unités cohérentes au nom spécial :

Grandeur	Nom	Expression en unités de base
fréquence	hertz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$
force	newton	$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
pression	pascal	$\text{Pa} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
énergie	joule	$\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
puissance	watt	$\text{W} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$
charge électrique	coulomb	$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$
potentiel électrique	volt	$\text{V} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$
capacité électrique	farad	$\text{F} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$
résistance électrique	ohm	$\Omega = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$
conductance électrique	siemens	$\text{S} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$
champ magnétique	tesla	$\text{T} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
inductance	henry	$\text{H} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$
angle plan	radian	$\text{rad} = \text{m}/\text{m} = 1$
angle solide	stéradian	$\text{sr} = \text{m}^2/\text{m}^2 = 1$

↪₂ (facultatif) Démontrer que le watt s'écrit bien comme proposé dans le tableau.

↪₃ (facultatif) Quelle relation physique utiliser pour exprimer le volt en unités de base ? et le farad ? Le faire et vérifier le tableau.

- Pour le watt, on utilise $E = P \times t$, donc $[E] = [P][t]$, donc $\text{J} = \text{W} \cdot \text{s}$ et donc $\text{W} = \text{J} \cdot \text{s}^{-1}$. Or on a vu que $\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Il vient : $\text{W} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$.
- Pour obtenir le volt, on peut partir de la puissance électrique $P = UI$. Donc $\text{W} = \text{V} \cdot \text{A}$. On remplace le watt par son expression. On isole : $\text{V} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$.
- Pour le farad, on part de $Q = CU$, qu'on dérive en $i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}$ et donc $[C] = \frac{[i]}{[U]/[dt]} = \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{\text{A}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{A}^{-1}} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$.

II.4 Unités cohérentes ou non cohérentes

Toutes les unités des parties II.1, II.2 et II.3 sont des unités dites *cohérentes*, car **quand on les exprime en fonction des 7 unités de base du SI, il n'y a aucun facteur numérique autre que 1**.

La notation avec crochets signifie en fait "unité cohérente de".

Exemples et contre-exemples :

- $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$, donc le hertz est bien une unité cohérente.

- $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, donc le newton est bien une unité cohérente.
- $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, donc le km est une unité **non** cohérente.

↪₄ Indiquer si les unités suivantes sont cohérentes ou non. Si non, donner la conversion.

- le litre : **non cohérente**, $1 \text{ L} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
- le bar : $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$
- la minute : **non cohérente**, $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
- le degré pour les angles : **non cohérente**, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

↪₅ Connaissez-vous d'autres exemples d'unités non cohérentes ?

- tous les multiples et sous-multiples des unités cohérentes : mm, cm, dm, ms, mV, kA, kJ, kW, nF, etc...
- la minute, l'heure, le jour, le mois, l'année,
- l'année-lumière, l'unité astronomique, l'électronvolt, etc...

Il faut connaître les conversions suivantes :

Unités non cohérente	Expression
litre (L)	$1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$
bar	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
degré Celsius ($^\circ\text{C}$)	$T (\text{K}) = T (\text{en } ^\circ\text{C}) + 273,15$
degré (pour un angle)	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

Les unités cohérentes sont sans danger dans les applications numériques. Mais ce n'est pas le cas des unités *non* cohérentes, comme nous allons le voir.

III Applications numériques : attention aux unités

III.1 Quelles unités choisir

Applications numériques (AN)

Lors d'une AN, deux options :

Option 1 | On met **toutes les grandeurs d'entrée dans des unités cohérentes** (quitte à faire des conversions).

Alors le **résultat est automatiquement dans une unité cohérente**.

Option 2 | On met les grandeurs dans des unités **pas forcément cohérentes** (litre, gramme, bar...).

Alors on obtient facilement l'unité du résultat **en écrivant les unités dans le calcul** et en voyant comment elles se simplifient.

En résumé :

Applications numériques (AN)

option 1 : utilisation d'unités cohérentes

m kg s A mol K cd

toutes les combinaisons des unités de base :

m^2 m^3 kg m^{-3} $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ etc...

certaines combinaisons ont un nom spécial :

- joule (J), watt (W), newton (N), pascal (Pa)
- hertz (Hz)
- volt (V), coulomb (C), ohm (Ω), farad (F), henry (H), tesla (T), etc...
- radian (rad)
- etc...

AN automatiquement correctes :

pesanteur $g = 10 \text{ m s}^{-2}$
durée de chute libre $t = 2 \text{ s}$

→ distance parcourue :

$$d = \frac{1}{2}gt^2 = 0,5 \times 10 \times 2^2 = 20 \text{ m}$$

loi d'Ohm :

$$U = R \times I = 4 \Omega \times 3 \text{ A} = 12 \text{ V}$$

option 2 : utilisation d'unités non cohérentes

tous les (sous)multiples des unités cohérentes :

km dm cm mm g kA mmol etc...

et d'autres (qui sont dites "hors SI") :

litre (L) bar atm min h année
hectare tonne calorie degré kWh eV
etc...



AN à surveiller :

repasser en unités cohérentes

OU

garder les unités dans les calculs
pour obtenir l'unité finale

$$n \times M = 4 \cancel{\text{mol}} \times 16 \text{ g } \cancel{\text{mol}}^{-1} = 64 \text{ g}$$

$$d = v \times t = 4 \text{ km/h} \times 3 \cancel{\text{h}} = 12 \text{ km}$$

Exemples de l'option 1 (unités cohérentes en entrée → unités cohérentes au résultat) :

– En mécanique : un gaz exerce une pression $p = 2 \text{ bar}$ sur une vitre de surface $S = 3 \text{ m}^2$.

La force pressante sur la vitre est donnée par $F = p \times S = 6 \text{ N}$

– En thermodynamique, loi des gaz parfaits : une enceinte de volume $V = 2 \text{ L}$ contient $n = 2 \text{ mol}$ d'un gaz, à la température $T = 27^\circ \text{C}$.

On donne $R \simeq 8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Calculer la valeur de la pression en utilisant $pV = nRT$: donc $p = \frac{nRT}{V} = 2,4 \times 10^6 \text{ Pa} = 24 \text{ bar}$

– En électronique :

L'encadré ci-dessus contient déjà l'exemple $U = RI = 4 \Omega \times 3 \text{ A} = 12 \Omega \text{ A} = 12 \text{ V}$.

Autre exemple, constante de temps de la charge d'un condensateur : $\tau = RC = 2\,\Omega \times 10\,\text{F} = 20\,\text{s}$.

→ L'attitude à avoir par défaut est l'option 1.

Cela dit, elle n'est pas toujours pratique, et l'option 2 s'impose parfois, cf exemples suivants.

Exemples de l'option 2 (unités non cohérentes → garder les unités et simplifier) :

- Vous roulez à $v = 100\,\text{km/h}$ pendant $\Delta t = 2,5\,\text{heures}$. La distance parcourue est

$$D = v \times \Delta t = 100\,\text{km/h} \times 2,5\,\text{h} = 250\,\text{km}$$

→ il aurait été pénible et inutile de revenir aux mètres et aux secondes.

- En chimie : soit une solution de concentration $c = 10\,\text{mol/L}$ et de volume $V = 1\,\text{L}$.

Elle contient une quantité de matière :

$$n = c \times V = 10\,\text{mol/L} \times 1\,\text{L} = 10\,\text{mol}$$

→ il aurait été pénible et inutile de revenir aux mètres cubes et aux mol/m^3 .

- Même type d'exemple avec la masse molaire, souvent exprimée en g/mol .

Une masse $m = 10\,\text{g}$ de fer de masse molaire $M = 56\,\text{g/mol}$ contient une quantité de matière :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{10\,\text{g}}{56\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0,18\,\text{mol}.$$

→ il aurait été pénible et inutile de revenir aux kg.

III.2 Outil : garder les unités dans les AN pour faire des conversions

Les préfixes suivants servent à obtenir des multiples et sous-multiples des unités :

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^1	déca	da	10^{-1}	déci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	péta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{27}	ronna	R	10^{-27}	ronto	r
10^{30}	quetta	Q	10^{-30}	quecto	q

On peut effectuer des conversions en remplaçant l'unité à convertir par son expression.

Exemples : à convertir en unités cohérentes du SI :

- Convertir $1\,\text{cm}^3$ en m^3 : on utilise $1\,\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$ et donc

$$1\,\text{cm}^3 = 1\,(10^{-2}\,\text{m})^3 = (10^{-2})^3\,\text{m}^3 = 10^{-6}\,\text{m}^3.$$

- Masse volumique $\rho = 12\,\text{g/cm}^3 = 12\,\frac{10^{-3}\,\text{kg}}{(10^{-2}\,\text{m})^3} = 12\,\frac{10^{-3}\,\text{kg}}{10^{-6}\,\text{m}^3} = 12 \times 10^3\,\text{kg/m}^3$

- Vitesse $v = 130\,\text{km/h} = 130\,\frac{10^3\,\text{m}}{60 \times 60\,\text{s}} = \frac{130 \times 10^3}{3600}\,\text{m/s} = 36,1\,\text{m/s}$

- Rotation $\omega = 2000 \text{ tour/min} = 2000 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 209 \text{ rad/s}$
- Taux de désintégration $\frac{dn}{dt} = 10^4 \text{ atomes par jour} = 10^4 \frac{\text{atomes}}{24 \times 60 \times 60 \text{ s}} = 0,12 \text{ atomes/s}$
- En chimie, constante de cellule des conductimètre, etc...

IV Homogénéité : un outil de vérification des équations

Définition

Une relation est dite homogène lorsque :

- les grandeurs de chaque côté du signe égal ont la même unité,
- s'il y a une somme ou une soustraction, alors chaque terme a la même unité,
- les arguments des fonctions cos, sin, exp, ln, etc., sont d'unité 1 ("sans unité").

⇒ dans une expression comme $A = B + C$, on doit avoir $[A] = [B] = [C]$.

Propriété

Les relations de base utilisées en physique sont toujours homogènes. De plus, une suite de calculs préserve l'homogénéité.

→ **Aboutir à une expression non homogène est le signe d'une erreur.**

IV.1 1^{er} usage : vérifier des formules

L'homogénéité sert à repérer les erreurs.

→₆ Lors d'un devoir, un élève aboutit à ces expressions.
Vérifier l'homogénéité et proposer une correction.

⇒ $p(t) = \frac{1}{2\rho_0} \cdot \left(\frac{V_0 - \sum u}{V_0} \right)^2$ PAS HOMOGENE 😞

1 - Le volume d'une sphère e^2 .

2 - La surface d'un disque e

3 - La vite

4 - La vite

5 - P_o ' d'une lentille de focale f' : $Oa'b' = \frac{Oa'b + f'}{Oa'b \times f'}$.

6 - Quantité de matière $n = \mathcal{C}/\mathcal{V}$.

7 - L'équation qui porte sur la tension $u_c(t)$ aux borne
le générateur de tension $\mathcal{E}$, e

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \mathcal{E} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

IV.2 2nd usage : retrouver des formules oubliées

L'homogénéité peut servir à retrouver des formules dont vous n'êtes plus certain.

Exemple : l'énoncé donne une masse molaire $M = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, un volume $V = 2 \text{ L}$, une masse $m = 12 \text{ g}$.

↪₇ Donner l'**unique formule possible** qui exprime la quantité de matière n (en mole) en fonction de M
et de m .

$$n = \frac{m}{M}$$

↪₈ Donner l'**unique formule possible** qui exprime la concentration molaire C en fonction de n et de V .

$$C = \frac{n}{V}$$

↪₉ Donner l'**unique formule possible** qui exprime la concentration massique C_m (en g/L ou kg/m³) en
fonction de C et de M .

$$C_m = C \times M$$

IV.3 Une bonne idée : garder les unités dans les AN pour vérifier l'homogénéité

Conseil pour les AN

Il est recommandé d'écrire les unités dans les AN, car ceci sert à obtenir avec certitude l'unité finale, et à contrôler que la relation utilisée est bien homogène.

Exemples :

$$- C = n \times V = 10 \text{ mol} \times 2 \text{ L} = 20 \text{ mol} \cdot \text{L} \rightarrow \text{problème.}$$

$$- C = \frac{n}{V} = \frac{4 \text{ mol}}{2 \text{ L}} = \frac{4 \text{ mol}}{2 \text{ L}} = 2 \text{ mol L}^{-1} \rightarrow \text{ok.}$$

$$- m = \frac{n}{M} = \frac{4 \text{ mol}}{16 \text{ g mol}^{-1}} = \frac{4}{16} \text{ mol}^2 \cdot \text{g}^{-1} \rightarrow \text{problème.}$$

$$- m = n \times M = 4 \underline{\text{mol}} \times 16 \underline{\text{g mol}^{-1}} = 64 \text{ g} \rightarrow \text{ok.}$$

V Homogénéité : un outil pour prédire des relations

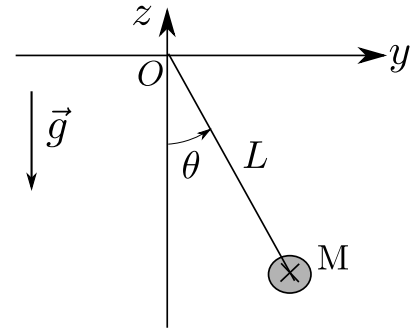
Une autre utilisation de l'analyse dimensionnelle est la prédiction de relations.

V.1 Méthode générale et exemple du pendule

Exemple : soit un pendule constitué d'une masse m accrochée à l'extrémité mobile d'un fil de longueur l . On travaille dans le référentiel terrestre où le champ de pesanteur est g .

On constate expérimentalement que la période des oscillations dépend de la longueur L du fil.

→ On cherche l'expression de la période T .



Méthode générale :

- On isole la grandeur dont on cherche l'expression (ici la période T), et on liste les grandeurs dont elle peut dépendre.
→ ici, T peut dépendre de g, L, m
- On écrit les unités cohérentes de ces grandeurs dans le SI (faire un tableau).
- On cherche à obtenir l'unité de la grandeur cherchée (ici T donc les secondes) en combinant les autres grandeurs, pour éliminer les unités inutiles ou obtenir les bons exposants.

	T	m	L	g
unité	s	kg	m	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Déjà, m ne peut pas intervenir car rien ne pourra simplifier les kg.

On élimine les mètres en faisant g/L : on a des s^{-2} .

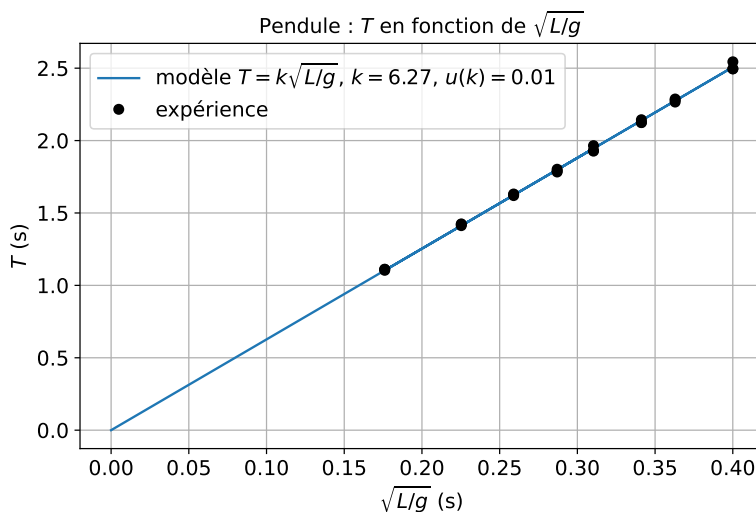
On inverse et prend la racine carré pour avoir des secondes. Donc $T = \sqrt{L/g}$

Tout ceci ne permet pas de prédire un éventuel facteur numérique.

On a donc prouvé que : $T = k\sqrt{L/g}$ avec k un nombre inconnu (qui peut être 1, 2, π , ...)

Pour obtenir k , il faut faire l'expérience, ou bien résoudre le problème mathématiquement (PFD, équations différentielles, solutions, etc...).

Expérience :



→₁₀ Que semble valoir le nombre k ?

2π !

Résolution mathématique complète :

Si vous continuez la physique dans le supérieur, vous montrez que le PFD projeté sur le vecteur $\vec{e}_\theta$ de la base polaire (ou $\vec{T}$ de la base de Frenet) s'écrit $mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$, ce qui se linéarise aux petits angles en l'équation différentielle du second ordre $\ddot{\theta} + (g/L)\theta = 0$, dont les solutions sont en $\theta(t) = A\cos(\sqrt{g/L}t + \varphi)$, dont la période est en effet $T = 2\pi\sqrt{L/g}$!

Remarques :

- Une méthode plus formelle consiste à écrire la grandeur recherchée sous la forme $T = k \times m^\alpha g^\beta L^\gamma$, où k est une constante sans dimension. Puis on impose à la relation d'être homogène afin de trouver les valeurs des exposants.

$$[T] = [k] \times [m]^\alpha [g]^\beta [L]^\gamma \Rightarrow s = 1 \times \text{kg}^\alpha \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^\beta \times \text{m}^\gamma = \text{kg}^\alpha \cdot \text{m}^{\beta+\gamma} \cdot \text{s}^{-2\beta}$$

Il faut donc $\alpha = 0$, $\beta = -1/2$, $\gamma = -\beta = 1/2$. On arrive donc à $T = k\sqrt{\frac{L}{g}}$.

- Ce n'est pas toujours si simple, car il n'y a parfois **pas** une dépendance unique et la méthode ne permet pas toujours d'aboutir à une expression. Notamment si on peut former un paramètre **sans unité**. Cf exemples V.4 et V.5.
- La réponse à laquelle on aboutit dépend des paramètres pris en compte.

Ici nous avons négligé les frottements, par exemple proportionnel à v .

Nous avons aussi négligé l'influence potentielle de l'angle de départ θ_0 !

L'analyse dimensionnelle montrerait que $T = \sqrt{\frac{L}{g}} f(\theta_0)$. Une démonstration complète et compliquée montre que $f(\theta_0) = 2\pi(1 + \theta_0^2/16 + \dots)$.

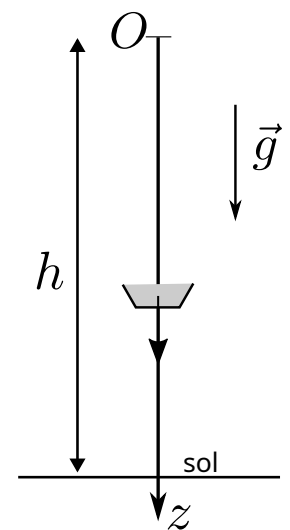
V.2 Autre exemple : la chute libre

On étudie la chute libre d'un objet de masse m dans un champ de pesanteur g . On néglige tout frottement.

On souhaite exprimer la durée t de chute d'une hauteur h (durée écoulée entre l'instant du lâché et l'impact au sol).

↪₁₁ Le faire, en suivant les mêmes étapes que pour le pendule.

	t	m	h	g
unité	s	kg	m	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$



Bilan : $t = g^{-1/2}h^{1/2}$, ce qui se note aussi $t = k\sqrt{\frac{h}{g}}$.

La résolution complète du problème (cf mécanique en terminale) donne $h = gt^2/2$ et donc $k = \sqrt{2}$.

V.3 Autre exemple : rayon de Schwarzschild

Un trou noir est un astre tellement dense que même la lumière ne peut s'en échapper.

La théorie physique qui décrit ces objets est la théorie de la relativité générale d'Einstein. Ces équations de base font intervenir uniquement les constantes $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (constante de gravitation universelle) et $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (vitesse de la lumière dans le vide).

On cherche à obtenir l'expression du rayon R d'un trou noir de masse m . Il s'agit du rayon en deça duquel la lumière ne s'échappe plus.

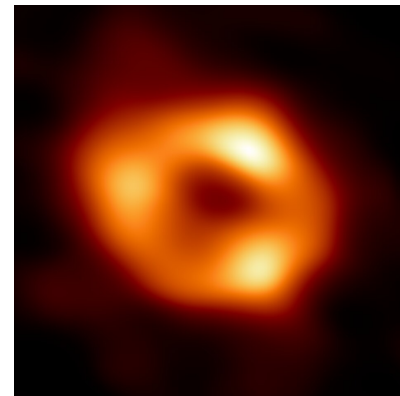


Image du trou noir supermassif au centre de notre galaxie.

La théorie de la relativité générale étant un peu trop compliquée pour des élèves de lycée, nous allons le faire par analyse dimensionnelle.

	R	m	G	c
unité	m	kg	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

→₁₂ Le faire.

On arrive à $R = \frac{Gm}{c^2}$ qui est homogène à des mètres. C'est la seule possibilité. Donc on peut écrire $R = k \frac{Gm}{c^2}$ avec k un nombre inconnu.

Remarque : la résolution complète (théorie de la relativité générale) montre qu'il s'agit bien de la bonne expression, avec le facteur numérique $k = 2$.

→₁₃ Faire l'application numérique pour R , pour un trou noir de la masse du Soleil ($m = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$).

$m \approx 3 \text{ km}$.

V.4 Autre exemple : déviation de la lumière par un trou noir

Tout objet massif peut dévier la lumière si elle passe à proximité. Le phénomène est particulièrement marqué à proximité d'un trou noir.

On cherche l'expression de l'angle de déviation θ d'un photon qui passe à une distance d d'un objet de masse m .

La théorie qui décrit cela est encore la théorie de la relativité générale (constantes qui interviennent : c et G).

Là aussi, nous allons chercher à trouver l'expression de θ par analyse dimensionnelle.

	θ	m	G	c	d
unité	1	kg	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	m

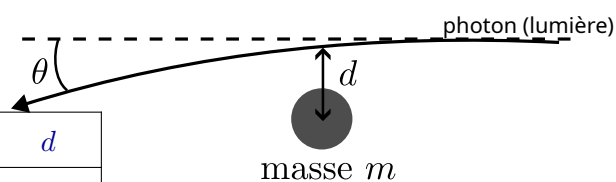
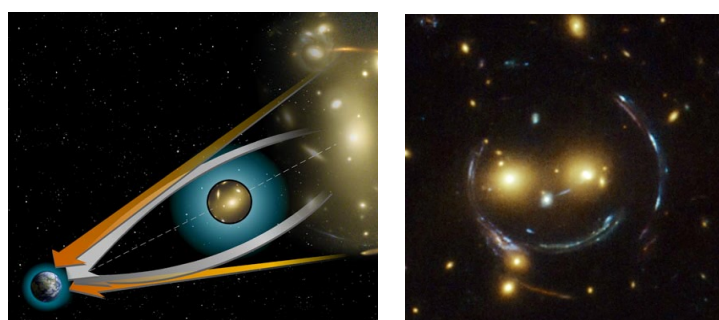


Illustration de l'effet de lentille gravitationnelle : il s'agit d'une déviation de la lumière par des galaxie massives.

→₁₄ Le faire.

On arrive à $\theta = \frac{Gm}{dc^2}$. On ne prend pas l'inverse, car on s'attend à θ qui décroît si d augmente.

Remarque : la résolution complète (théorie de la relativité générale) montre que : $\theta = \frac{4Gm}{dc^2}$

Sur cet exemple, on voit que l'analyse dimensionnelle ne permet pas de conclure à coup sûr.

En effet, notons $\theta = \alpha$ l'expression trouvée précédemment. Il y a une infinité d'autres possibilités qui sont homogènes : $\theta = k(\alpha)^n$ avec n quelconque, et même de façon générale $\theta = f(\alpha)$ avec f une fonction quelconque. Seule la résolution complète du problème (théorie de la relativité) permet de trancher.

Ceci arrivera à chaque fois que l'on peut former un paramètre sans unité à partir des paramètres choisis.

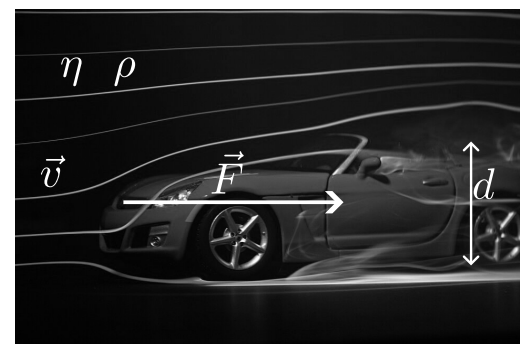
La conclusion n'est toutefois pas inintéressante. On voit par exemple que l'angle de déviation sera le même si on double la masse et la distance d , car cela laisse α inchangé.

V.5 Autre exemple : force de frottement dans l'air

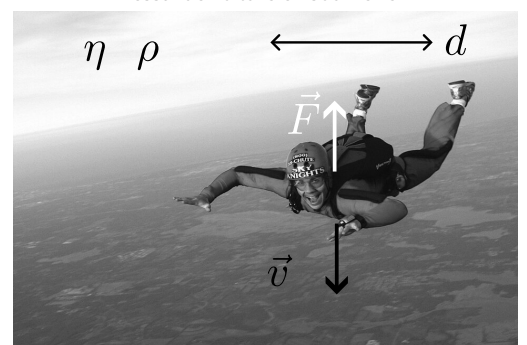
On considère un objet (un ballon, un cycliste, un coureur, une voiture, un avion...) qui se déplace dans l'air. Il subit une force de frottement de la part de l'air, qui est opposée au mouvement. On cherche son expression.

En réalité, le fluide peut-être de l'air, de l'eau, du miel... On note :

- ρ la masse volumique du fluide ($\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$),
- η la viscosité du fluide ($\eta_{\text{air}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $\eta_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $\eta_{\text{miel}} \approx 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)
- m la masse de l'objet,
- d le diamètre de l'objet,
- v la vitesse de l'objet,
- g l'intensité de la pesanteur ($g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).
- Et enfin, F la norme de la force de frottement de l'air sur l'objet.



essai de voiture en soufflerie



saut en parachute

~>15 Il y a beaucoup de paramètres. Parmi ceux listés ci-dessus, lesquels vous semblent pouvoir intervenir dans l'expression de la force F ?

	F	d	v	ρ	η
unité	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	m	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

On retient ρ , η , d , et v .

~>16 À partir des grandeurs d , v et ρ , construire une combinaison homogène à une force.

$F = \rho d^2 v^2$ à pour unité $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, donc des newtons.

~>17 À partir des grandeurs d , v et η , construire une combinaison homogène à une force.

$F = \eta d v$ à pour unité $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, donc des newtons.

Il y a donc au moins deux expressions possibles pour F ! Laquelle est la bonne ? F est-elle proportionnelle à v ou à v^2 ? Cela change tout... Et l'analyse dimensionnelle ne permet pas de conclure. La raison est qu'il est possible de former une grandeur sans dimension avec les données du problème :

→₁₈ Avec ρ , η , d et v , montrer que l'on peut former une grandeur sans unité, que l'on notera Re (c'est le "nombre de Reynolds").

$$Re = \frac{\rho d v}{\eta} \text{ est sans unité.}$$

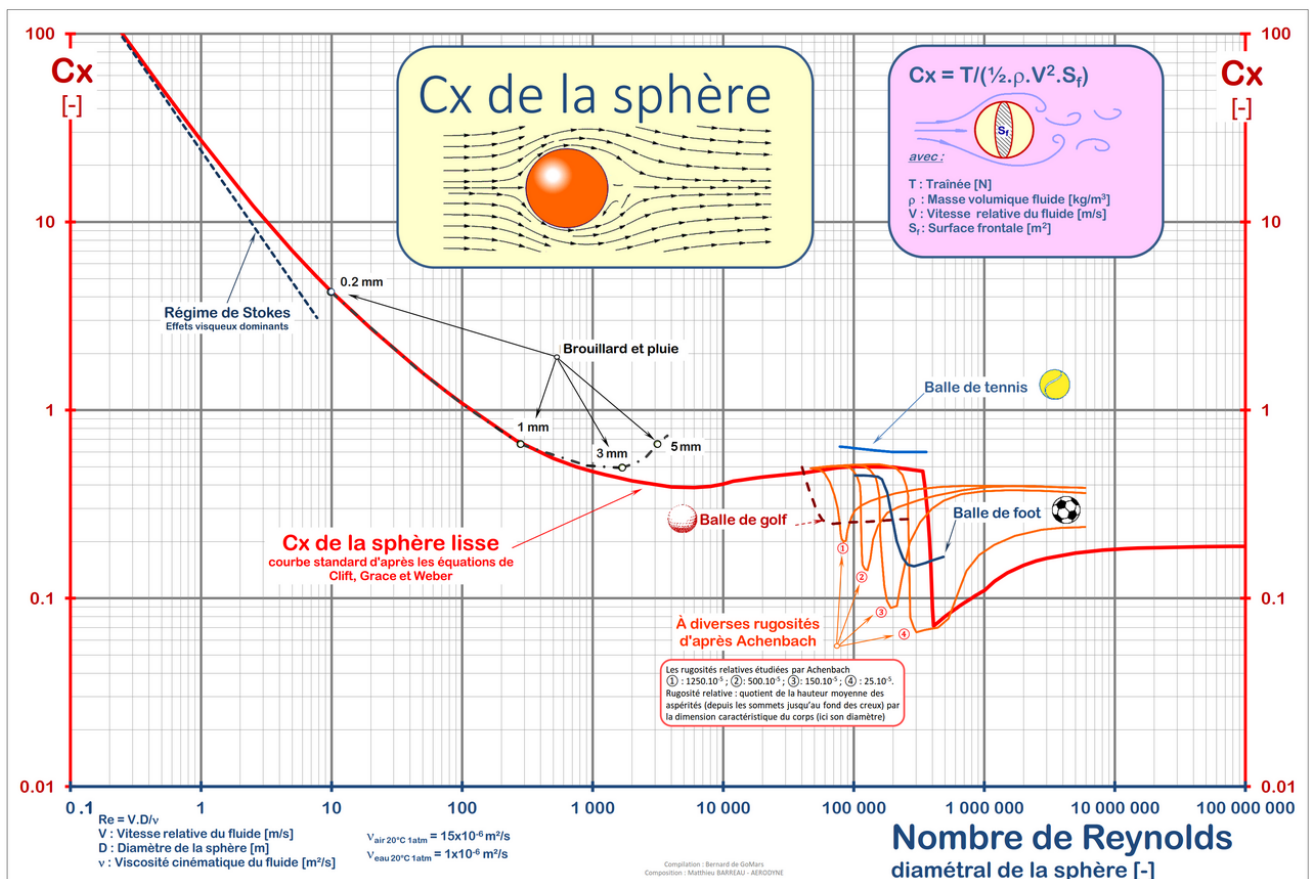
→ **Conclusion** : l'analyse dimensionnelle nous indique seulement que

$$F = f(Re) \rho d^2 v^2 = g(Re) \eta d v,$$

avec f et g des fonctions inconnues, que seules l'expérience ou la théorie (résolution des équations de la mécanique des fluides) permettent de connaître. La façon usuelle de noter le résultat final est :

$$F = \frac{1}{2} C_x(Re) \rho S v^2,$$

avec $S = \pi d^2/4$ la section de l'objet et $C_x(Re)$ une fonction du nombre de Reynolds, appelée coefficient de traîné.



Fonction $C_x(Re)$ pour une sphère placée dans un écoulement. source image : Wikipedia

On constate que :

- À grand nombre de Reynolds (donc grande vitesse d'écoulement), $C_x \approx \text{cst}$, donc F est bien proportionnelle à v^2 .

C'est le cas pour les vélos, les voitures, et les écoulements dans l'air en général.

- À petit nombre de Reynolds (donc faible vitesse ou liquide très visqueux), $C_x(Re) \approx 24/Re$, et la loi s'écrit $F = \frac{1}{2} C_x(Re) \rho S v^2 = 3\pi \eta d v$, donc F devient proportionnelle à la vitesse.

V.6 Autre exemple : longueur, durée et masse de Planck

La longueur de Planck l_P est une longueur en dessous de laquelle les phénomènes gravitationnels deviennent également quantiques.

Il est possible d'obtenir cette longueur par analyse dimensionnelle, en utilisant les seules constantes qui apparaissent dans les équations de la mécanique quantique et de la relativité générale : la constante de Planck $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ et $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

→₁₉ À partir des constantes c , h et G , former l'expression d'une longueur.

	l_P	h	G	c
unité	1	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$



Page extraite de Pour la Science, sur la gravitation quantique.

Avec les unités de G , c , h , il déjà faire la combinaison hG pour éliminer les kg :

$$[hG] = \text{m}^5 \cdot \text{s}^{-3}.$$

Ensuite, on divise par c^3 pour éliminer les secondes : $[hG/c^3] = \text{m}^2$.

La combinaison suivante donne donc bien des mètres :

$$l_P = \sqrt{\frac{hG}{c^3}}.$$

Aujourd'hui, personne n'est capable de décrire ce qu'il se passe en dessous de cette échelle.

→₂₀ Faire l'application numérique pour l_P .

$$l_P = 4,1 \times 10^{-35} \text{ m}.$$

Remarque : on peut aussi former une masse m et une durée T à partir de c , h et G . Il s'agit de la masse et de la durée de Planck.

→₂₁ Le faire.

$$m_P = \sqrt{hc/G} = 5,4 \times 10^{-8} \text{ kg} \text{ et } T_P = \sqrt{hG/c^5} = 1,3 \times 10^{-43} \text{ s}.$$

V.7 Autre exemple : glissade sur un igloo

On considère un pingouin au sommet d'un igloo, qui s'élance (sans vitesse initiale) pour glisser. Il finit par décoller de l'igloo avant de toucher le sol. On néglige les frottements.

L'angle à partir duquel le pingouin décolle dépend-il du rayon de l'igloo ? De la masse du pingouin ?

On répondra par analyse dimensionnelle, en commençant par lister les grandeurs dont peut dépendre cet angle.

