

# Résolution d'une équation : méthode par dichotomie

**Objectif** : résoudre une équation du type  $f(x) = 0$ .

Sur Capytale : notebook numéro 5fd8-1379950.

Certaines équations ne sont pas soluble à la main, et il faut alors recourir à une résolution numérique. Il existe plusieurs méthodes, dont les deux suivantes :

- La méthode de Newton (vue en SII).
- La méthode par dichotomie (que l'on voit ici).

## a/ Description de la méthode

Soit l'équation  $f(x) = 0$ , avec  $f$  une fonction continue qui s'annule une fois sur l'intervalle  $[a,b]$ . La méthode dichotomique permet de trouver une solution approchée de cette équation.

Prenons l'exemple de la fonction  $f(x) = x^2 - 2$ . On cherche à résoudre  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[0,2]$ . On sait que la solution est  $x = \sqrt{2} \approx 1,414213562\dots$ , et on va essayer de retrouver ceci avec l'algorithme de dichotomie.

### Préliminaire : tester si deux réels sont de signes opposés

Soit  $y$  et  $z$  deux réels non nuls. Propriétés :

- ▶  $y$  et  $z$  sont de même signe (tous deux positifs ou tous deux négatifs) si et seulement si  $y \times z > 0$ .
- ▶  $y$  et  $z$  sont de signes opposés (l'un positif, l'autre négatif) si et seulement si  $y \times z < 0$ .

**Exemple** : la fonction  $f$  étant continue et ne s'annulant qu'une seule fois entre  $a$  et  $b$ , on a nécessairement  $f(a)$  et  $f(b)$  de signes opposés.

Ceci se traduit par  $f(a) \times f(b) < 0$ .

### Idée générale de l'algorithme de dichotomie

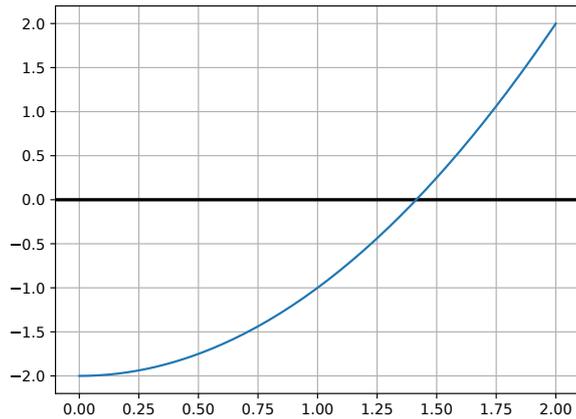
Le principe est de considérer  $m = \frac{a+b}{2}$  le milieu de l'intervalle  $[a,b]$ , et de déterminer si le zéro recherché est entre  $a$  et  $m$  ou entre  $m$  et  $b$ .

On poursuit alors la recherche soit dans l'intervalle  $[a,m]$ , soit dans l'intervalle  $[m,b]$ , avec la même méthode.

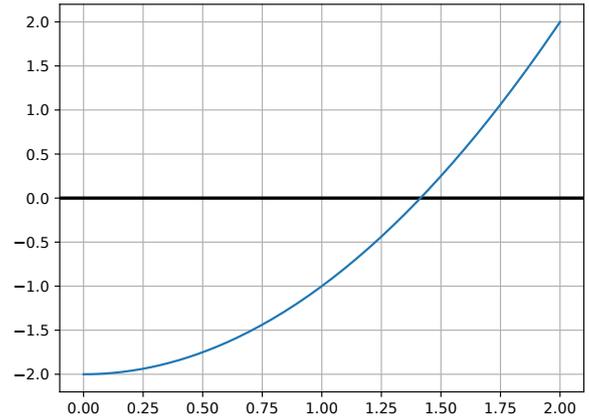
On s'arrête quand on a assez réduit l'intervalle de recherche.

Exemple des trois premières itérations sur les trois schémas à compléter ci-dessous :

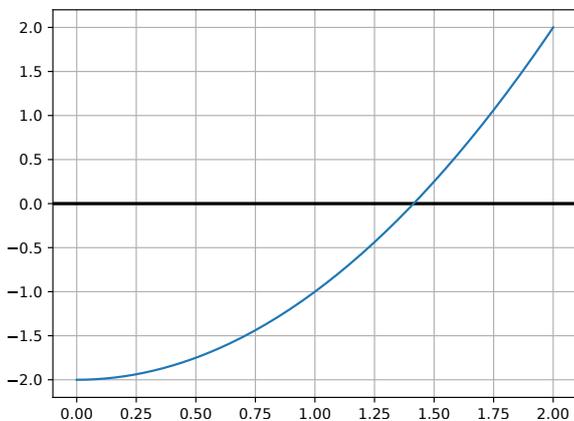
Itération 1,  
recherche entre  $a=0$  et  $b=2$  :



Itération 2,  
recherche entre ...



Itération 3,  
recherche entre ...



### Détail de l'algorithme

On se donne des valeurs pour  $a$  et  $b$ , ainsi qu'une valeur pour la précision  $\varepsilon$ .

Tant que  $|a - b| > \varepsilon$ , on réalise la boucle suivante :

On pose  $m = \frac{a + b}{2}$ .

- Si  $f(a) \times f(m) < 0$ , c'est que le zéro de  $f$  est entre  $a$  et  $m$  : il faut chercher entre  $a$  et  $m$ .

Le nouvel intervalle est donc entre  $a = a$  et  $b = m$ .

- Dans le cas contraire, c'est que le zéro de  $f$  est entre  $m$  et  $b$  : il faut chercher entre  $m$  et  $b$ .

Le nouvel intervalle est donc entre  $a = m$  et  $b = b$ .

Puis on recommence.

Lorsqu'on sort de la boucle, le zéro est donné par la valeur de  $m$ , à  $\varepsilon$  près.

1 - Compléter le code ci-dessous pour obtenir l'algorithme complet.

Puis le compléter sur Capytale (5fd8-1379950) et tester : quelle valeur obtenez-vous pour la solution de  $f(x) = 0$ ? Est-ce bien cohérent ?

```
def f(x):
    return x**2-2

epsilon = 1e-6
a = 0
b = 2

while abs(b-a) > epsilon:
    m = (a+b)/2
    if                                     # si f(a) et f(m) n'ont pas le même signe
        a=                                 # alors c'est que le 0 de f se trouve entre a et m
        b=
    else:
        a=                                 # sinon, c'est que le 0 de f est entre m et b
        b=

print(m)
```

**Retour sur la signification de  $\varepsilon$  :** prenons par exemple  $\varepsilon = 10^{-6}$ . L'algorithme s'arrête donc lorsque  $b - a < 10^{-6}$ . Comme on sait par construction que le 0 de  $f$  est toujours dans  $[a, b]$ , ceci signifie que  $m = (a + b)/2$  est proche de ce 0 à moins de  $10^{-6}$  près.

**Remarque :** il existe d'autres critères de terminaison, par exemple arrêter lorsque l'algorithme trouve un  $x$  tel que  $|f(x)| < \varepsilon$ .

2 - Modifier l'algorithme pour qu'il affiche le nombre d'itérations qui ont été nécessaires.

## b/ Un exemple concret

Dans le DM du chapitre 2 de chimie, on s'intéresse à la réaction chimique suivante :



Dans la question 3 du DM, on cherche à déterminer la valeur de l'avancement à l'équilibre de cette réaction. On introduit une quantité de matière  $n_0$  du réactif, et on pose  $\alpha = \xi/n_0$ . La question 3 doit mener à écrire qu'à l'équilibre, on a  $K^\circ = Q_r(\xi_{\text{éq}})$ . Ceci se traduit par :

$$K^\circ = \frac{\left(\frac{3\alpha_{\text{éq}}}{1 + 2\alpha_{\text{éq}}}\right)^3}{\frac{1 - \alpha_{\text{éq}}}{1 + 2\alpha_{\text{éq}}} p \times p^{\circ 2}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{K^\circ = \frac{27\alpha_{\text{éq}}^3}{(1 + 2\alpha_{\text{éq}})^2(1 - \alpha_{\text{éq}})} \frac{p^2}{p^{\circ 2}}}.$$

C'est l'équation encadrée qu'il faut résoudre pour obtenir la valeur de  $\alpha_{\text{éq}}$ . On prend comme dans le DM :  $p = 1$  bar et  $K^\circ = 10$ . On pose  $x = \alpha_{\text{éq}}$  pour avoir les mêmes notations que précédemment.

On rappelle que  $x > 0$  (car  $x = \alpha = \xi/n_0 > 0$ ) et  $x \leq 1$  (car l'avancement  $\xi$  ne peut pas dépasser  $\xi_{\text{max}} = n_0$ , donc  $x = \alpha = \xi/n_0 \leq 1$ ).

3 - Reformuler l'équation encadrée à résoudre en une équation  $f(x) = 0$  (donner l'expression de  $f$  en fonction de  $x$ ,  $K^\circ$ ,  $p$  et  $p^\circ$ ).

4 - La première étape est toujours de s'assurer visuellement que la fonction  $f$  a un unique zéro dans l'intervalle de recherche. Ceci permet d'ailleurs de choisir cet intervalle de recherche.

Écrire les lignes nécessaires pour tracer la fonction  $f$  entre 0 et 0,99 (elle n'est pas définie en  $x = 1$ ). Il faudra créer un tableau de valeurs de  $x$  à l'aide de :

```
x = np.linspace(0,0.99,200) # crée un tableau de valeurs de x, compris entre 0 et 0.99
```

Puis utiliser `plt.plot(x,f(x))`.

5 - Utiliser votre algorithme de dichotomie pour trouver la solution. Vérifier si ceci correspond bien à la valeur de 0,80 donnée dans le DM.

### c/ Fonction bisect

Enfin, la fonction `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize` permet de trouver directement le zéro d'une fonction. Elle utilise une méthode de type dichotomie. On l'utilise ainsi :

```
import scipy.optimize as sp
x = sp.bisect(f,a,b)
print(x)
```

`a` et `b` sont les limites de l'intervalle de recherche, et `f` la fonction pour laquelle on résout  $f(x) = 0$ .

6 - Utiliser cette fonction pour trouver la valeur de  $\alpha_{\text{éq}}$ . Comparer avec votre résultat précédent.