

I Circuit RLC série : décharge

1 - Schéma obligatoire, avec interrupteur fermé, et flèches de tension sur les composants.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u_L + u_R + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C}{dt} \right) + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C &= 0 \end{aligned}$$

avec par identification $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \frac{L}{R} \omega_0$ soit après remplacement : $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

2 - On trouve $Q = 10$ et $\omega_0 = 10^5$ rad/s.

3 - $Q = 10 > 1/2$ donc le régime est pseudo-périodique.

La solution particulière est nulle ici, donc la solution est égale à la solution homogène :

$$u_C(t) = (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) e^{-\mu t},$$

et pour déterminer la pseudo-pulsation Ω et le facteur μ il faut trouver les racines de l'équation caractéristique. Celle-ci est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) < 0$.

Les racines sont donc

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + i \frac{1}{2} \sqrt{4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} + i \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ r_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q} - i \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \end{aligned}$$

On identifie avec $r_{1 \text{ ou } 2} = -\mu \pm i\Omega$ pour obtenir :

$$\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Ici $Q = 10$, donc $\Omega = \omega_0 \times 0,9987 \simeq \omega_0$.

4 - a/ Détermination des CI

★ Pour $u_c(0)$: on sait que la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.

Or pour $t < 0$ le condensateur est chargé à U_0 , donc $u_C(0^-) = U_0$.

Donc $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$.

★ Pour $\frac{du_c}{dt}(0)$:

Pour $t < 0$ le courant est nul car le circuit est ouvert, donc $i(0^-) = 0$.

Donc par continuité du courant (car il passe à travers une bobine) : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Donc $\frac{du_c}{dt}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0$.

b/ Utilisation des CI

★ Utilisation CI1 : $u_C(0) = U_0$.

D'après la solution : $u_C(0) = A$.

Donc $A = U_0$.

★ Utilisation CI2 : $\frac{du_C}{dt}(0) = 0$.

Il faut dériver la solution :

$$\begin{aligned}\frac{du_C}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} (A \cos(\Omega t) e^{-\mu t} + B \sin(\Omega t) e^{-\mu t}) \\ &= -A\Omega \sin(\Omega t) e^{-\mu t} + A \cos(\Omega t) (-\mu) e^{-\mu t} + B\Omega \cos(\Omega t) e^{-\mu t} + B \sin(\Omega t) (-\mu) e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Donc $\frac{du_C}{dt}(0) = -A\mu + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $B = A \frac{\mu}{\Omega} = U_0 \frac{\mu}{\Omega}$.

★ Ici on a $\Omega \simeq \omega_0$, donc $B = U_0 \frac{\omega_0/(2Q)}{\Omega} = \frac{U_0}{2Q}$.

Finalement :

$$u_C(t) = U_0 \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{2Q} \sin(\Omega t) \right) e^{-\mu t}.$$

5 - Tracer l'allure de la solution, et tracer également l'allure du portrait de phase (u_c, \dot{u}_c) .

II Circuit RLC série : soumis à un échelon de tension

1 - Schéma obligatoire, avec source de tension égale à E , et flèches de tension sur les composants. Même démarche que dans l'exercice précédent :

$$\Leftrightarrow u_L + u_R + u_C = E$$

$$\Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = E$$

$$\Leftrightarrow L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C}{dt} \right) + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

$$\Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} E$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$$

avec par identification $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \frac{L}{R}\omega_0$ soit après remplacement : $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

2 - On trouve $Q = 10$ et $\omega_0 = 10^5$ rad/s.

3 - * Solution particulière : on la suppose constante, donc il reste $\omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$, donc $u_{C,P} = E$.

* Solution de l'équation homogène : identique à l'exercice précédent, on a

$$u_{C,H}(t) = (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) e^{-\mu t},$$

avec

$$\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Ici $Q = 10$, donc $\Omega = \omega_0 \times 0,9987 \simeq \omega_0$.

* Solution totale :

$$u_C(t) = E + (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) e^{-\mu t}.$$

* Détermination des conditions initiales (pas vraiment demandé) : Pour $t < 0$ on a $u_C = 0$ (condensateur non chargé) et $i = 0$ (générateur éteint).

Donc $u_C(0^-) = 0$ et $i(0^-) = 0$.

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

Et par continuité de l'intensité traversant une bobine : $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Donc $\frac{du_C}{dt}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0$.

* Utilisation CI1 : $u_C(0) = 0$.

D'après la solution : $u_C(0) = A + E$.

Donc $A = -E$.

* Utilisation CI2 : $\frac{du_C}{dt}(0) = 0$.

Il faut dériver la solution, c'est la même chose que dans l'exercice précédent car E est une constante, donc on obtient : $\frac{du_C}{dt}(0) = -A\mu + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $B = A\frac{\mu}{\Omega} = -E\frac{\mu}{\Omega}$.

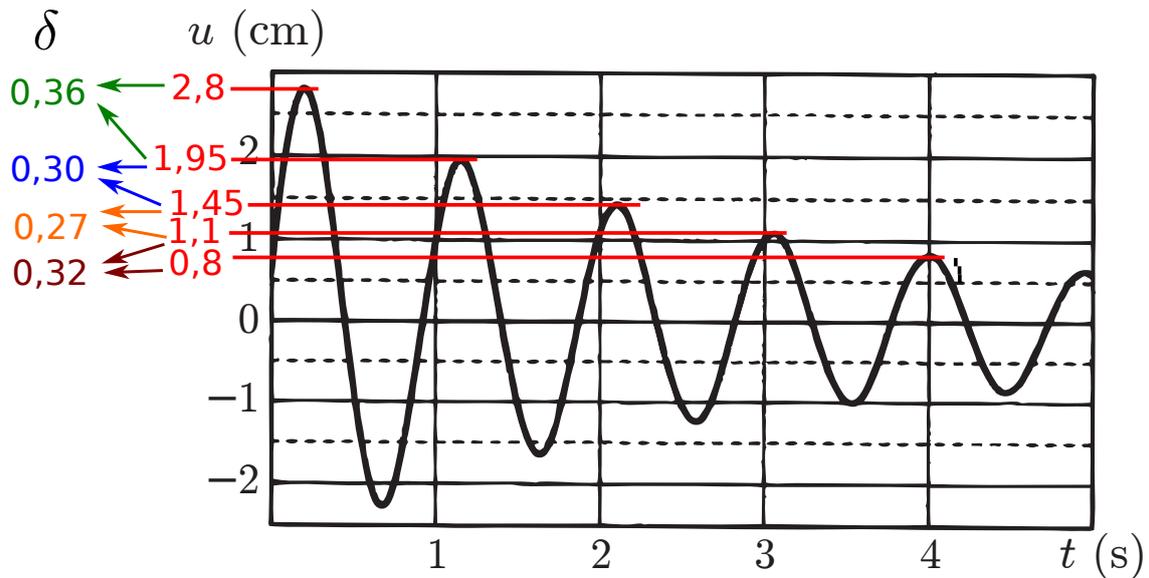
* Ici on a $\Omega \simeq \omega_0$, donc $B = -E\frac{\omega_0/(2Q)}{\Omega} = -\frac{E}{2Q}$.

Finalement :

$$u_C(t) = E - E \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{2Q} \sin(\Omega t) \right) e^{-\mu t}.$$

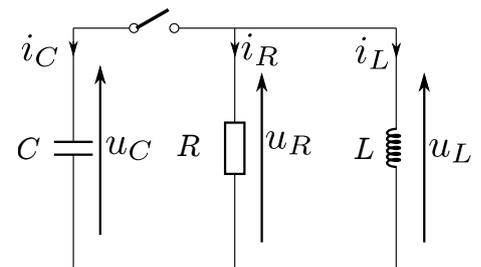
4 - Tracer l'allure de la solution, et tracer également l'allure du portrait de phase (q, \dot{q}) .

III Système masse-ressort vertical



IV Circuit RLC parallèle

Schéma obligatoire avec convention récepteur pour tous les récepteurs :



1 - Suite d'étapes :

$$i_c + i_L + i_R = 0 \quad (\text{loi des nœuds})$$

$$C \frac{du_c}{dt} + i_L + \frac{u_R}{R} = 0 \quad (\text{loi d'Ohm et loi condensateur})$$

$$C \frac{du_c}{dt} + i_L + \frac{u_c}{R} = 0$$

$$C \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} + \frac{d u_c}{dt} \frac{1}{R} = 0 \quad (\text{on dérive tout par rapport au temps})$$

$$C \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{u_L}{L} + \frac{d u_c}{dt} \frac{1}{R} = 0 \quad (\text{loi bobine})$$

$$C \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{u_c}{L} + \frac{d u_c}{dt} \frac{1}{R} = 0$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

(on remarque que Q à l'expression inverse de celle pour le RLC série!)

2 - * Instant initial ($t = 0^+$) :

– Seules deux grandeurs sont continues : $u_C(t)$ et $i_L(t)$.

Et on sait que $u_C(0^-) = U_0$ et $i_L(0^-) = 0$.

On a donc $\boxed{u_C(0^+) = U_0}$ et $\boxed{i_L(0^+) = 0}$.

– Tout est en dérivation donc quel que soit t on a $u_R(t) = u_L(t) = u_C(t)$.

En particulier : $\boxed{u_R(0^+) = u_L(0^+) = u_C(0^+) = U_0}$.

Donc $\boxed{i_R(0^+) = \frac{u_R(0^+)}{R} = \frac{U_0}{R}}$.

– Loi des nœuds appliquée en particulier à 0^+ : $i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$,

donc $\boxed{i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+) = -\frac{U_0}{R}}$.

3 - Le régime est critique pour $Q = 1/2$, donc pour $R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2}$, donc pour $\boxed{R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = 250 \Omega}$.

4 - Ici $Q = 1/2$: le discriminant est nul.

★ L'équation n'a pas de second membre, donc la solution particulière est nulle et la forme générale des solutions est

$$\boxed{u_C(t) = (At + B)e^{-\mu t}}$$

Pour trouver μ on cherche la racine de l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, donc la racine est $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$. On a donc $\mu = \omega_0$.

★ Condition initiale 1 : $u_C(0^+) = U_0$.

D'après la solution $u_C(0) = B$, donc $B = U_0$.

★ Condition initiale 2 : $\dot{u}_C(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\frac{U_0}{RC}$.

D'après la solution $\dot{u}_C = Ae^{-\omega_0 t} + (At + B)(-\omega_0)e^{-\omega_0 t}$, donc $\dot{u}_C(0) = A - \omega_0 B$.

On a donc $A - \omega_0 B = -\frac{U_0}{RC}$, d'où $A = \omega_0 U_0 - \frac{U_0}{RC}$.

★ Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = U_0 \left[\left(\omega_0 - \frac{1}{RC} \right) t + 1 \right] e^{-\omega_0 t}}$$

Remarque : On a $\omega_0 RC = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = Q = \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{RC} = 2\omega_0$. Ainsi l'expression de $u_c(t)$ s'écrit aussi :

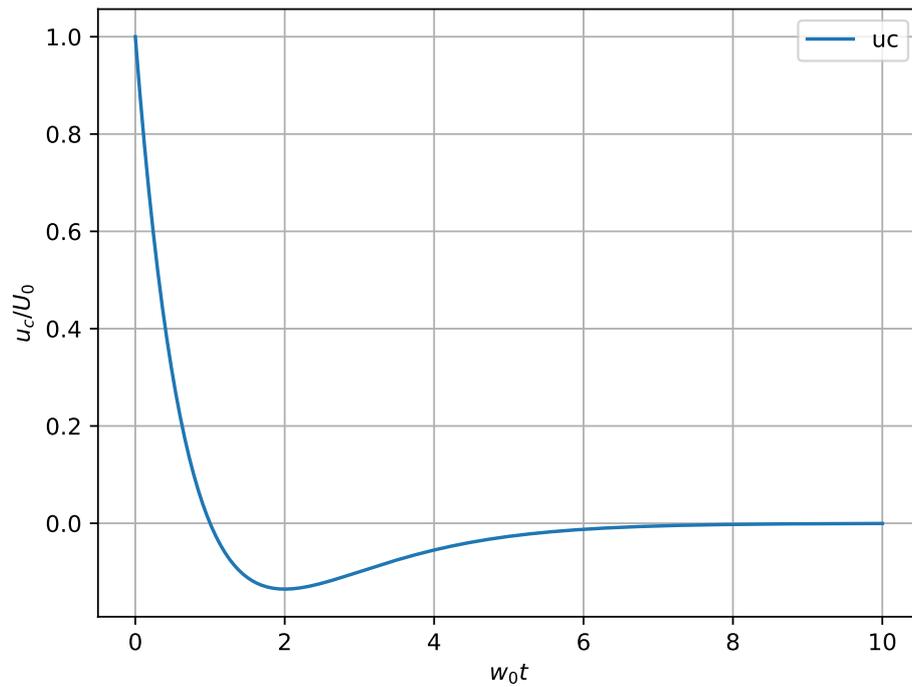
$$\boxed{u_C(t) = U_0 (1 - \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}}$$

Ainsi, pour $t = 1/\omega_0$ la tension passe de positive à négative.

On peut aussi calculer la dérivée, et obtenir

$$\boxed{\dot{u}_C(t) = -\frac{U_0}{RC} \left(1 - \frac{\omega_0 t}{2} \right) e^{-\omega_0 t}}$$

Ainsi, la fonction $u_C(t)$ décroît de $t = 0$ à $t = 2/\omega_0$ et croît ensuite vers son asymptote (valeur nulle en $+\infty$).



5 - $u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$.

Avec $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}$ et $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}$.

Avec les CI on obtient, après calculs : $A = U_0 \frac{\frac{1}{RC} + r_2}{r_2 - r_1}$ et $B = U_0 \frac{\frac{1}{RC} + r_1}{r_1 - r_2}$.

Remarque : $\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$.

Tracé ci-dessous.

