Étude des systèmes linéaires
Chapitre 1

Correction – TD – Régime transitoire des systèmes du 1$^{\text{er}}$ ordre

I Vrai-faux/questions courtes

II Charge du circuit RL série

III Décharge d'une bobine

IV Circuits à deux mailles

Mettre les flèches de courant et de tension !!
Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{R_2}$.
Puis $i = \dfrac{u_{R_1}}{R_1}$ et loi des mailles pour avoir $u_{R_1} = E_0 - u$.
Finalement : $\dfrac{E_0 - u}{R_1} = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{R_2}$, soit donc $\boxed{\dfrac{E_0}{R_1 C} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u\left(\dfrac{1}{R_2 C} + \dfrac{1}{R_1 C}\right)}$.

V Bateau à supercondensateur

⋆ Dimensionnement de C :
Durée d'un aller-retour : 14 minutes ; puissance $P = 2 \times 100 \times 735\,\mathrm{W}$; énergie $E = P \times t = 1{,}23 \times 10^8\,\mathrm{J}$.
Énergie stockée par les condensateurs : $\dfrac{1}{2}C_{\mathrm{tot}}U^2$ avec $U = 400\,\mathrm{V}$.
Il faut donc $\dfrac{1}{2}C_{\mathrm{tot}}U^2 = E$, d'où $C_{\mathrm{tot}} = \dfrac{2E}{U^2} = 1543\,\mathrm{F}$.
Or $N = 100$ condensateurs, donc $15{,}4\,\mathrm{F}$ par condensateur.

⋆ Dimensionnement de R :
Le temps de charge est de l'ordre de $t = 5\tau = 5RC_{\mathrm{tot}}$. En prenant $t = 4\,\mathrm{min}$, il faut donc $R = \dfrac{t}{5C_{\mathrm{tot}}} = 0{,}031\,\Omega$.

VI Surtension à la fermeture d'un circuit inductif

1 - L'interrupteur fermé se comporte comme un fil, de résistance nulle. Tout le courant va donc passer par ce fil, et rien ne passera par la résistance. Comme aucun courant ne passe dans R_1, on peut faire comme si cette branche du circuit n'existait pas.

La tension u est la tension aux bornes de l'interrupteur fermé, donc $\boxed{u = 0}$.

Le régime permanent correspond ici à des grandeurs constantes dans le temps. La bobine se comporte donc comme un fil. Le circuit est donc simplement un générateur E en série avec une résistance R_2, si bien que $\boxed{i = E/R_2}$.

2 - Au bout d'un temps long, le régime permanent est atteint et ici les grandeurs sont constantes dans le temps. La bobine se comporte donc comme un fil, et le circuit comporte uniquement un générateur E en série avec une résistance R_1 et une résistance R_2.

On a donc $\boxed{i_\infty = E/(R_1+R_2)}$.

Concernant u, on a d'après la loi d'Ohm : $u = R_1\, i$, d'où $\boxed{u_\infty = R_1 \times i_\infty = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}E}$.

3 - On utilise le fait que le courant traversant une bobine est une fonction continue du temps. Ainsi, i à $t = 0^+$ (juste après l'ouverture de l'interrupteur) a la même valeur que juste avant l'ouverture de l'interrupteur. On a calculé cette valeur dans la question 2 : il s'agissait de $i = E/R_2$. On a donc $\boxed{i(0^+) = \dfrac{E}{R_2}}$.

Concernant u : u et i sont toujours reliés par la loi d'Ohm, donc on a : $\boxed{u(0^+) = R_1 i(0^+) = E \times \dfrac{R_1}{R_2}}$.

A.N. : on trouve $i(0^+) = 10\,\text{mA}$ et $u(0^+) = 5.0\times 10^2\,\text{V}$.

Commentaires : la valeur de u est élevée. D'après la formule, elle sera d'autant plus élevée si R_1 est grande.

4 - Si l'on enlève la résistance R_1, cela revient à prendre $R_1 \to +\infty$, et notre modèle prévoit alors que $u \to +\infty$.

En réalité, lorsque u dépasse une certaine valeur l'air entre les deux contacts de l'interrupteur est en partie ionisé et devient conducteur : il se produit une étincelle. Cette étincelle assure en fait la continuité du courant traversant la bobine.

5 - $\star$ On repère les tensions dans le circuit en mettant les flèches dans le bon sens (à contre-courant, convention récepteur). La loi des mailles donne : $E = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i + R_2 i$. On divise par L pour ne plus rien avoir devant la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1+R_2}{L}i = \frac{E}{L}, \tag{1}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{L},} \tag{2}$$

avec $\tau = L/(R_1+R_2)$.

$\star$ Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec coefficients constants et second membre constant. La solution est la somme de :

- La solution de l'équation homogène $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}i = 0$, c'est à dire $i_H = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$, avec A une constante.
- Une solution particulière, que l'on choisit constante. On a alors $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 0$, et on voit que $i = E/(R_1+R_2)$ convient.

On a donc

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R_1+R_2}. \tag{3}$$

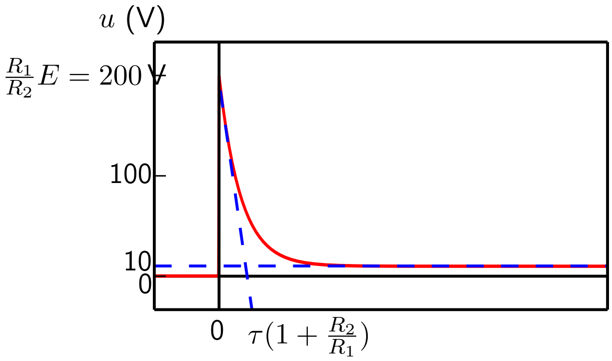
On détermine la constante A à l'aide de la condition initiale $i(0^+) = \dfrac{E}{R_2}$. On trouve alors $A = E\dfrac{R_1}{R_2(R_1+R_2)}$. Finalement, on a bien

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).} \tag{4}$$

On peut vérifier rapidement sur cette expression qu'on a bien $i \to E/(R_1+R_2)$ en $+\infty$, et $i(0) = E/R_2$, comme prévu.

⋆ On en déduit :

$$\boxed{u(t) = R_1 i(t) = E \times \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).} \tag{5}$$



VII Charge d'un condensateur à partir d'un autre

1 - Courant traversant le condensateur 1 : $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$. Et pour le second : $i_2 = C\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$. Mais ces deux courants sont les mêmes, donc en simplifiant par C : $\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$.

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}u_1 - u_2}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $u_1 - u_2 = \mathrm{cst} = U_0$ (on trouve la constante en prenant $t = 0$).

2 - Loi des mailles : $u_1 + u_R + u_2 = 0$, avec $u_R = Ri = RC\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ et $u_2(t) = u_1(t) - U_0$ on obtient :

$$u_1 + RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1 - U_0, \text{ soit } \boxed{\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{u_1}{\tau} = \frac{U_0}{2\tau} \text{ avec } \tau = \frac{RC}{2}.}$$

3 - En régime stationnaire, $\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 0$ et l'équation donne $\boxed{u_1 = \dfrac{U_0}{2}.}$

On a donc aussi $\boxed{u_2 = u_1 - U_0 = -\dfrac{U_0}{2}.}$

4 - Initialement $\mathcal{E}_i = \dfrac{1}{2}Cu_1^2 = \dfrac{1}{2}CU_0^2$.

À la fin : $\mathcal{E}_f = \dfrac{1}{2}Cu_1^2 + \dfrac{1}{2}Cu_2^2 = 2 \times \dfrac{1}{2}C(U_0/2)^2 = \dfrac{1}{4}CU_0^2$.

Bilan : il manque $\dfrac{1}{2}CU_0^2 - \dfrac{1}{4}CU_0^2 = \dfrac{1}{4}CU_0^2$, c'est-à-dire la moitié de l'énergie intiale, qui a été dissipée par effet Joule dans la résistance.