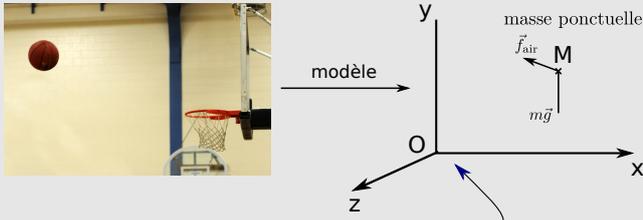


Introduction à la mécanique du point

I Cinématique : description du mouvement

1 - Modélisation par un point matériel



2 - Référentiel, coordonnées, temps

3 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

4 - Types de mouvements

rectiligne (uniforme), circulaire (uniforme).

II Forces : description des actions exercées sur un objet

1 - Notion de force

- Vecteur + point d'application
- Principe des actions réciproques

2 - Expressions de certaines forces

- Gravitation
- Archimède
- Poids
- Tension fil
- Électrostatique
- Réaction d'un support
- Force pressante
- Frottementsfluides

III Dynamique : influence des forces sur le mouvement - PFD

1 - Référentiel galiléen et principe d'inertie

Dans un réf. galiléen : tout corps isolé est en mouvement rectiligne uniforme

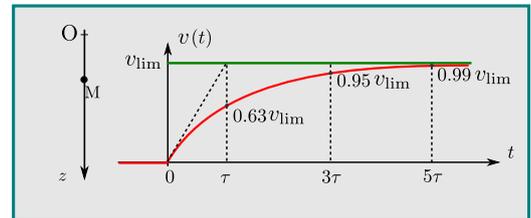
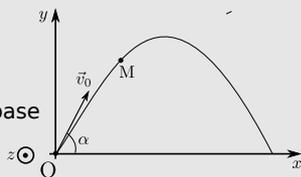
2 - Définition de la quantité de mouvement, PFD

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{Dans un réf. galiléen : } m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

V Exemple de la chute libre avec frottements

IV Exemple du mouvement dans un champ de pesanteur

- Système
- Référentiel
- Schéma
- Bilan des forces, exprimées dans la base
- PFD, avec accélération exprimée dans la base
- Projection
- Intégration



Ce qu'il faut connaître

_____ (cours : I)

- ₁ Qu'est-ce qu'un référentiel ? Et un repère ? Donner deux exemples de référentiel.
- ₂ Pour les coordonnées cartésiennes, que valent les produits scalaires $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y$, $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z$? Et $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y$, $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z$?

_____ (cours : II)

- ₃ Que dit la troisième loi de Newton ?
- ₄ Quelle est l'expression de la force d'attraction gravitationnelle entre deux masses ? Faire un schéma.
- ₅ Même question pour le poids.
- ₆ Quelle est l'expression de la poussée d'Archimède s'exerçant sur un corps immergé ? Faire un schéma .
- ₇ Comment est décrite la réaction du support dans le cadre des lois de Coulomb ? Faire un schéma.

_____ (cours : III)

- ₈ Que dit le principe d'inertie ou première loi de Newton ?
- ₉ Comment s'énonce le principe fondamental de la dynamique appliqué à un point matériel ?

Ce qu'il faut savoir faire

- _____ (cours : I)
- ▶₁₀ Établir les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère cartésien. → **EC1**
 - ▶₁₁ À partir de la donnée des fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, en déduire le vecteur vitesse, accélération, trouver l'expression de la trajectoire et tracer son allure. → **EC2**
 - ▶₁₂ Pour un mouvement où le vecteur accélération est constant, en déduire l'évolution temporelle des vecteurs vitesse et position, puis l'équation de la trajectoire. → **EC4** (à partir de q2)
- _____ (cours : II)
- ▶₁₃ Faire un bilan des forces sur un système, en rendre compte sur une figure. → **TD**
- _____ (cours : IV)
- ▶₁₄ Déterminer l'évolution de la position d'un objet lancé dans un champ de pesanteur uniforme. → **EC3, EC4**
- _____ (cours : V)
- ▶₁₅ Déterminer l'évolution de la vitesse d'un objet en chute libre verticale avec une force de frottement en $-\lambda\vec{v}$. → **EC5**

Exercices de cours

Exercice C1 – Expressions de \overrightarrow{OM} , \vec{v} , \vec{a}

On se place dans un repère en coordonnées cartésiennes.

- 1 - Faire un schéma du repère. Placer un point M de coordonnées x , y , z .
- 2 - Donner les expressions des vecteurs positions \overrightarrow{OM} , vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} .

Exercice C2 – Cinématique

On considère un mouvement pour lequel $x(t) = 0$, $y(t) = at$, $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + bt$.

- 1 - En déduire les expressions des vecteurs vitesse et accélération.
- 2 - Trouver l'équation de la trajectoire $z(y)$.
- 3 - Tracer l'allure de cette trajectoire. Tracer quelques vecteurs vitesses et vecteurs accélérations en différents points de la trajectoire.

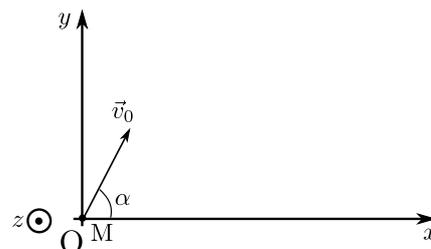
Exercice C3 – Chute libre sans vitesse initiale

On lâche une balle d'une hauteur $h = 5$ m. On néglige tout frottement. On se place dans un repère cartésien avec axe z vers le haut et $z = 0$ au niveau du sol.

- 1 - Quelles sont les équations du mouvement, portant sur \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} ?
- 2 - En partant des équations précédentes, en déduire les expressions des composantes \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} de la vitesse \vec{v} de la balle.
- 3 - En déduire les expressions des coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la balle.

Exercice C4 – Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

On lance une balle de masse m , décrite comme un point matériel, avec une vitesse \vec{v}_0 comme sur le schéma ci-contre. Le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme, de norme $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La balle est initialement à l'origine du repère. Le référentiel est galiléen.



- 1 - Quelles sont les équations du mouvement, portant sur \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} ?
- 2 - En partant des équations précédentes, en déduire les expressions des composantes \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} de la vitesse \vec{v} de la balle.
- 3 - En déduire les expressions des coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la balle.

Il est ensuite possible de tracer l'allure de la trajectoire, etc... Cf TDII.

Exercice C5 – Chute libre verticale avec frottements

On lâche une bille de masse m sans vitesse initiale. La bille est initialement à l'origine du repère. Le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme, de norme $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La bille subit une force de frottement du type $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ avec $\lambda > 0$. Le référentiel est galiléen. On choisit un axe Oz orienté vers le bas. On admet que le mouvement de la bille est selon l'axe Oz tout au long du mouvement.

- 1 - Aboutir à une équation du mouvement sur la vitesse v (on rappelle qu'ici $v = \dot{z}$).
- 2 - Résoudre l'équation précédente pour obtenir l'évolution de $v(t)$. Tracer l'allure de la solution.
- 3 - Quelle est l'expression de la vitesse limite? Quel est l'expression du temps caractéristique au bout duquel cette vitesse est atteinte?

Méthodes

Mise en garde : ne JAMAIS écrire une égalité entre un vecteur et un scalaire!

Par exemple $m\vec{a} \neq mg$.

Méthode : Comment obtenir l'équation du mouvement pour un problème de mécanique?

- Système : à définir.
- Référentiel : à définir.
- Repère : à définir, au choix parmi cartésien, polaire, cylindrique (et parfois sphérique).
- Schéma, en précisant les axes. Placer le point M à un instant quelconque, et les vecteurs de base.
- Bilan des forces : liste des forces ; les exprimer en fonction des vecteurs de base du repère ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ si cartésien, ou $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ si polaire, etc.) ; les représenter sur le schéma.
- Application du PFD. Il faut exprimer l'accélération \vec{a} en fonction des vecteurs de base du repère ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ si cartésien, ou $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ si polaire, etc.).
- Projection sur les vecteurs de la base pour obtenir les équations du mouvement, qui portent sur $x(t), y(t), z(t)$ si repère cartésien, ou sur $r(t), \theta(t)$ si repère polaire, etc.
- Il faut ensuite résoudre ces équations : solution générale ou primitive, déterminer les constantes avec les CI.

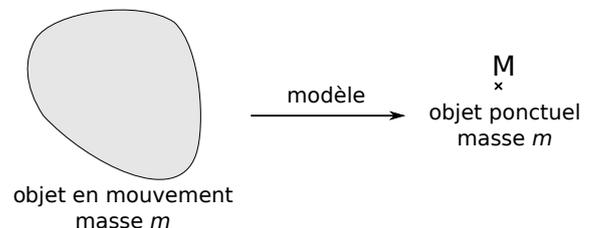
Cours

I – Cinématique : description du mouvement

1 – Modèle du point matériel

Objectif : décrire le mouvement d'un objet.

Le modèle du point matériel (ou de la masse ponctuelle) consiste à décrire le mouvement d'un objet en le représentant par un seul de ses points.



Ce point est souvent le centre de masse (ou centre de gravité) de l'objet (nous verrons pourquoi en mécanique des solides). En faisant cela, on perd de l'information : on ne connaît plus la rotation de l'objet sur lui-même.

2 – Référentiel, système de coordonnées

- **Référentiel :** c'est un objet, qui sert de référence pour l'étude du mouvement d'autres objets.
→ Un mouvement (trajectoire, vitesse) dépend du référentiel dans lequel on l'étudie.

Exemples : le référentiel de la salle de classe ou le référentiel terrestre, le référentiel de la voiture, du vélo, de la route, de l'avion...

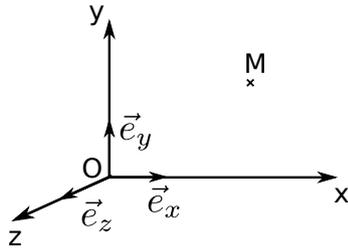
► **Temps absolu** : le temps mesuré est le même dans tous les référentiels.

Remarque : ceci n'est vrai que dans la théorie de la mécanique classique. Dans la théorie de la relativité restreinte, le temps s'écoule différemment selon le référentiel.

► **Repère** : pour mesurer la position des objets dans un référentiel donné, il faut le munir d'un repère.

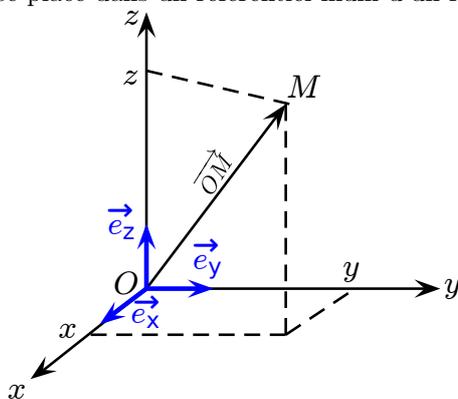
Exemple du repère cartésien :

Ce repère possède trois vecteurs de base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.
Propriétés :



3 – Vecteurs position, vitesse et accélération

On se place dans un référentiel muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



– Coordonnées de M :

– Vecteur position \vec{OM} :

– Vecteur vitesse :

– Vecteur accélération :

Notation avec des points :

Bilan en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$$

Il suffit de dériver pour passer de l'une à l'autre.

Projection de \overrightarrow{OM} , \vec{v} et \vec{a} sur les vecteurs de base :

Projeter un vecteur (ou une relation entre vecteurs) sur un vecteur de base \vec{e}_x , revient à prendre le produit scalaire avec \vec{e}_x .

→₁ Donner les projections de \overrightarrow{OM} , \vec{v} et \vec{a} sur le vecteur de base \vec{e}_x .

→₂ Exemple : faire l'EC2.

4 – Types de mouvements particuliers

	trajectoire	$\ \vec{v}\ $	\vec{a}
Rectiligne	droite	variable	colinéaire à \vec{v}
Rectiligne uniforme	droite	constante	nul
Circulaire	cercle	variable	quelconque
Circulaire uniforme	cercle	constante	\perp à \vec{v}

→₃ faire un schéma correspondant à chaque cas :

Propriétés cinématiques

- Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.
- Si la trajectoire est courbe, alors le vecteur accélération est dirigé du côté de la concavité de la trajectoire.

II – Forces : description des actions exercées sur un objet

1 – Notion de force

On considère un système (un objet, un ensemble d'objets, un point matériel...) en interaction avec un autre système.

Force

Modèle : la description de cette interaction se fait par une force, qui est un vecteur caractérisé par

- sa norme, sa direction et son sens,
- son point d'application.

Le vecteur force ne dépend pas du référentiel.

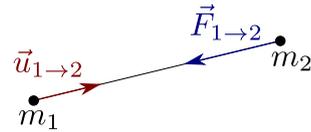
Principe des actions réciproques (ou 3^e loi de Newton)

Si l'objet A exerce une force $\vec{F}_{A \rightarrow X}$ sur l'objet X, alors l'objet X exerce sur A une force $\vec{F}_{X \rightarrow A}$ qui est opposée :

$$\vec{F}_{X \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow X}.$$

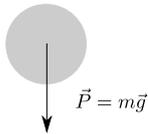
2 – Forces à distance

- **Force de gravitation** : soit deux masses ponctuelles m_1 et m_2 . Soit $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ la force qu'exerce la masse 1 sur la masse 2.



Avec $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ un vecteur unitaire (de norme 1) qui va de 1 vers 2, et $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ est la constante universelle de gravitation.

- **Poids** : le poids d'un objet résulte de l'attraction gravitationnelle de la Terre sur l'objet.



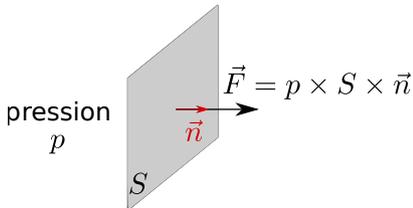
Point d'application : le centre de gravité de l'objet.

Avec \vec{g} la pesanteur. À la surface de la Terre, $\|\vec{g}\| = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

- **Force électrostatique** (ou force de Coulomb) : entre charges électriques. Voir chapitre 4.

3 – Forces de contact

- **Force pressante** : soit une paroi au contact d'un fluide (un gaz ou un liquide) où règne une pression p .



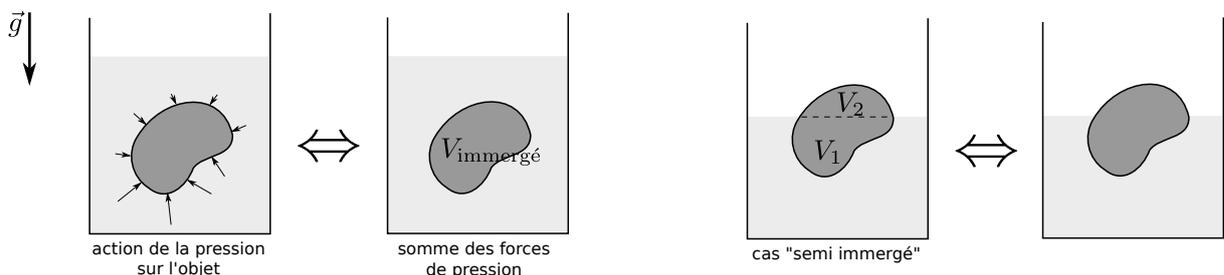
↪₄ On considère une vitre de surface $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$, à la pression atmosphérique d'un côté et exposée au vide de l'autre. Quelle est la valeur de la résultante des forces de pression s'exerçant sur cette vitre ?

- **Poussée d'Archimède** : Soit un objet immergé dans un fluide (un gaz ou un liquide).

Hypothèses : • le fluide est au repos • l'objet ne touche pas les bords du récipient

Alors : la résultante des forces de pression s'exerçant sur l'objet est égale à l'opposée du poids du fluide déplacé.

Point d'application : le centre de masse du fluide déplacé.



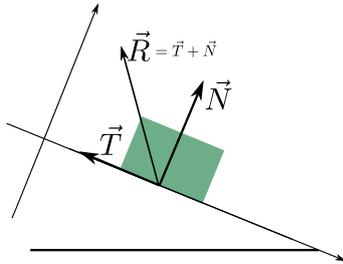
→₅ On considère une balle de rayon $R = 10$ cm immergée dans l'eau. Quelle est la valeur de la résultante des forces de pression s'exerçant dessus ?

► **Tension d'un fil** : toujours selon la direction du fil. Norme inconnue.

► **Réaction d'un support, frottements et lois de Coulomb** : Soit un objet en contact avec un support.

L'action du support sur l'objet est appelée **la réaction** du support. On la décompose en deux composantes :

- \vec{N} , composante normale au support. Toujours dirigée du support vers l'objet (sinon c'est qu'il y a rupture du contact).
- \vec{T} , composante tangentielle au support. Il s'agit d'une force de frottement.



Les lois de Coulomb sont un modèle simplifié donnant une description de cette force :

f est le coefficient de frottement. Il dépend du type de surface.

Ci-contre quelques valeurs tabulées de f .

$f = 0 \Leftrightarrow$ pas de frottements $\Leftrightarrow \vec{T} = \vec{0}$.

f	métal-métal 0,1 à 0,2	bois-bois 0,3 à 0,4	pneu sur chaussée 0,5 à 0,6
-----	--------------------------	------------------------	--------------------------------

► **Frottements fluides** : soit un objet en déplacement dans un fluide.

Il subit une force de frottement, opposée à son vecteur vitesse \vec{v} . On dispose de formules approchées :

- pour des vitesses faibles, $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$,
- pour des vitesses élevées, $\vec{F} = -\lambda\|\vec{v}\|^2 \vec{u}$ avec \vec{u} un vecteur unitaire dans le sens de \vec{v} .

► **Ressort** : voir chapitre 2.

III – Dynamique : influence des forces sur le mouvement

1 – Référentiel galiléen et principe d'inertie

a/ Définitions

Principe d'inertie (ou 1^{re} loi de Newton, ou définition d'un référentiel galiléen)

Il existe des référentiels privilégiés qui ont la propriété suivante : tout corps isolé (loin de tout) y est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme (le repos en étant un cas particulier).

Remarque : en pratique on a plutôt des objets **pseudo-isolés**, sur lesquels l'action des forces se compensent (exemple : un livre posé sur une table).

Alors dans un référentiel galiléen ces objets pseudo-isolés restent soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

b/ Caractérisation des référentiels galiléens

Propriété

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

c/ Exemples de référentiels considérés comme galiléens

Pour savoir si un référentiel est galiléen, il faut faire des expériences et voir si les lois de Newton sont vérifiées.

Le référentiel terrestre peut être, en très bonne approximation, considéré comme galiléen (tant que les expériences ont une durée petite devant une journée).

Pour des expériences plus précises ou plus longues, il faut se placer dans le référentiel géocentrique (qui est une meilleure approximation de référentiel galiléen), voir même le référentiel de Copernic (centré sur le système solaire).

2 – Définition de la quantité de mouvement, principe fondamental de la dynamique

a/ Quantité de mouvement

Définition

Soit M un point matériel de masse m et vitesse \vec{v} .

La quantité de mouvement de M est :

b/ PFD

Principe fondamental de la dynamique (ou 2^e loi de Newton)

Soit M un point matériel, $\vec{p} = m\vec{v}$ sa quantité de mouvement. Il est soumis à des forces \vec{F}_i .

Interprétation :

En dynamique, variation de $\vec{p} \Leftrightarrow$ force.

Comment ? Selon la seconde loi :

$$\underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\text{modification du mouvement}} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\text{actions exercées}} .$$

Cette loi fut énoncée par Newton vers 1700, et progressivement admise pour ses succès dans la description précise des expériences.

Remarques :

- ▶ Ce théorème est aussi appelé loi de la quantité de mouvement, ou encore en sciences de l'ingénieur : théorème de la résultante dynamique (qui s'applique aussi à des solides ou des systèmes).
- ▶ Ce théorème est aussi valable pour un système de points matériels ou pour un solide, à condition de définir $\vec{p} = m\vec{v}(G)$ où $\vec{v}(G)$ est la vitesse du centre d'inertie du système.
- ▶ Si M est isolé ou pseudo-isolé, on retrouve le fait que $\vec{p} = \vec{cst}$, et donc le mouvement est rectiligne uniforme.

IV – Exemple du mouvement dans un champ de pesanteur : EC3 et EC4

V – Exemple de la chute libre avec frottements : EC5