

# Ondes dans un plasma dilué non magnétisé

Mickaël Melzani  
mickael.melzani@gmail.com

## Abstract

*Cet article présente d'abord un aperçu global de la variété et de la complexité des modes de propagation existant dans un plasma dilué, puis s'attarde sur une démonstration rigoureuse de la relation de dispersion des ondes électromagnétiques transverses dans un plasma non magnétisé. Ce dernier point est motivé par la présence dans le programme de CPGE de l'étude des ondes électromagnétiques dans un plasma, et du constat par l'auteur d'un certain nombre d'imprécisions dans les livres de CPGE qui mènent cette étude.*

## Introduction

Nous avons présenté les propriétés essentielles des plasmas dilués (donc peu denses et chauds, prédominance des interactions collectives, quasi-absence de collisions) dans un précédent article [5], et nous nous attardons ici sur les ondes pouvant se propager dans ce type de plasmas.

Dans la première partie nous présentons un panorama général des différents types d'ondes pouvant se propager dans ces plasmas, et nous détaillons en particulier le cas du modèle non magnétisé. Après cette mise en contexte, nous nous concentrons dans la seconde partie sur les ondes électromagnétiques transverses dans le cadre du modèle chaud non magnétisé. L'étude de ce type particulier d'ondes est au programme de CPGE, et nous voulons ici fournir une discussion rigoureuse sur la physique en jeu et sur les hypothèses permettant de démontrer la relation de dispersion associée. Certains livres de CPGE sont en effet parfois imprécis sur quelques points, notamment :

- ▶ L'hypothèse incompressible parfois rencontrée n'est pas nécessaire.
- ▶ La température est souvent implicitement supposée nulle, ce qui n'est pas nécessaire même si la démonstration s'en trouve alors simplifiée (mais dans ce cas l'hypothèse n'a pas à rester implicite).
- ▶ Certaines démonstrations donnent l'impression que les ondes transverses sont les seules à exister dans un plasma non magnétisé, ce qui n'est pas le cas lorsque la température est non nulle (on le verra partie 1 et figure 2).
- ▶ L'utilisation d'une particule fluide dans les démonstrations n'est pas appropriée, car dans un plasma dilué il est souvent impossible de définir une échelle telle que  $l_{\text{libre parcours moyen}} \ll l_{\text{mésoscopique}} \ll L_{\text{macroscopique}}$ . Par exemple dans la magnétosphère terrestre  $l_{\text{libre parcours moyen}} \sim 10^{13}$  m pour une taille de la magnétosphère de l'ordre de  $10^8$  m (voir article précédent pour d'autres exemples). On peut toutefois toujours utiliser un modèle fluide, qui s'établit non pas via une particule fluide mais par des bilans sur un volume fixe. Les équations restent les mêmes, mais le terme de pression ne s'interprète pas à l'aide de collisions.

# 1 Généralités sur les ondes dans les plasmas dilués homogènes

Les ondes occupent une place centrale dans l'étude des plasmas. D'une part pour ce qui concerne la dynamique du plasma, puisque ce sont elles qui permettent le transport d'information, d'impulsion ou d'énergie entre les particules, et par exemple l'étude des instabilités, des phénomènes de transport ou de la turbulence passe par une compréhension des modes pouvant s'y propager. D'autre part, la transmission d'informations entre un émetteur et un récepteur à travers un plasma est permise par les ondes, et c'est par exemple ainsi que la réflexion de certaines ondes radio sur le plasma ionosphérique permet leur propagation sur de grandes distances, ou que les signaux GPS sont retardés en traversant l'ionosphère, etc.

Dans les plasmas dilués les interactions binaires entre particules sont extrêmement rares (que ce soit des collisions de cœur dur ou coulombiennes, voir article précédent), si bien que la propagation de proche en proche d'une perturbation ondulatoire n'est pas assurée par des collisions, mais par des interactions collectives entre les particules chargées : les champs électrique et magnétique créent des déplacements des charges, qui à leur tour modifient les champs, qui en retour déplacent les particules, etc. Les possibilités sont donc plus nombreuses que dans un gaz neutre, et la variété d'ondes supportées par un plasma est bien plus importante.

Nous commençons d'abord par fixer certains points de vocabulaire (§1.1), avant de poursuivre dans la section suivante par une présentation plus générale (§1.2).

## 1.1 Classification des ondes et vocabulaire

Considérons une onde dont la perturbation est du type  $\propto \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\}$ , repérée avec un indice 1. Les grandeurs non perturbées sont  $\vec{B}_0$  homogène,  $\vec{E}_0 = \vec{0}$  et  $n_{e0} = Z n_{i0}$  homogènes<sup>1</sup>. L'équation de Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0$  implique  $\vec{k} \perp \vec{B}_1$ , si bien que *la perturbation magnétique est toujours transverse au vecteur d'onde*. Il n'y a en revanche aucune contrainte sur la perturbation électrique, et la direction de  $\vec{E}_1$  relativement à  $\vec{k}$  permet une partition des ondes possibles en trois catégories (voir la figure 1 pour un résumé) :

- Une onde dite *longitudinale* est telle que  $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$ .

On définit également une onde *électrostatique* comme étant une onde dont la perturbation électrique dérive d'un potentiel<sup>2</sup> :  $\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\Phi_1$ , ce qui est équivalent à dire que  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = \vec{0}$ .

On voit immédiatement que les caractères électrostatique et longitudinal sont équivalents.

Ensuite, pour une telle onde on a  $\partial_t \vec{B}_1 = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = \vec{0}$ , et il n'y a pas de perturbation du champ magnétique. De plus comme la densité de charges est donnée par  $\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1$ , celle-ci n'est pas nulle (car  $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$ ) et il y a donc écart à la neutralité.

- Une onde dite *transverse* est telle que  $\vec{k} \perp \vec{E}_1$ .

On définit également une onde *inductive* comme étant une onde dans laquelle la perturbation électrique vérifie  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 0$ .

On voit donc que les caractères inductif et transverse sont équivalents.

---

1. Les deux dernières égalités proviennent de la quasi-neutralité, voir article précédent. On suppose en plus que les ions sont ionisés  $Z$  fois.

2. Le terme électrostatique ne doit pas faire penser ici que la situation est stationnaire : la dépendance en  $t$  de l'onde est bien toujours en  $\omega t$ .

Pour une telle onde, comme  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 0$ , il n'y a pas de perturbation de la densité de charges.

- Enfin, il existe des ondes ni transverses ni longitudinales, pour lesquelles  $\vec{k} \cdot \vec{E}_1$  est quelconque.

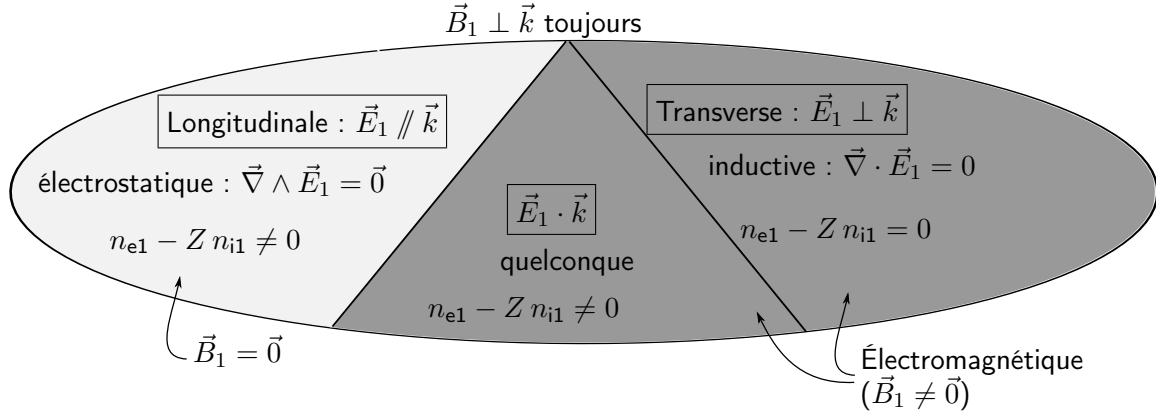


FIGURE 1 – Deux façons de partitionner l'ensemble des types d'ondes : soit par le caractère électromagnétique ( $\vec{B}_1 \neq \vec{0}$ , zone gris foncé) ou non ( $\vec{B}_1 = \vec{0}$ , zone gris clair), soit par le caractère longitudinal ou transverse ou ni l'un ni l'autre. Les grandeurs physiques indiquées dans cette figure sont les perturbations liées à l'onde.

On peut également partitionner l'ensemble des ondes à l'aide d'un autre critère, qui concerne l'existence ou non d'une perturbation du champ magnétique :

- Une onde est dite *électromagnétique* si elle possède une perturbation magnétique non nulle. C'est nécessairement le cas des ondes qui ne sont pas strictement longitudinale.
- Dans le cas contraire, on a alors  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = -\partial_t \vec{B}_1 = \vec{0}$  et l'onde est électrostatique.

## 1.2 Cartographie générale

Nous offrons ici une présentation assez générale, des détails pouvant être trouvés dans les livres classiques [1, 2, 3]. Nous considérons uniquement des plasmas dilués (donc peu denses et chauds, voir article précédent) et totalement ionisés (pas d'atomes neutres), avec un paramètre plasma  $\Lambda$  grand devant 1 pour pouvoir négliger l'effet des collisions sur la dynamique des ondes. Nous nous restreignons de plus à un plasma homogène, avec une distribution de vitesses isotrope et maxwellienne. Le plasma est alors caractérisé par ses températures ioniques et électroniques (qui ne sont pas nécessairement identiques), et par l'intensité du champ magnétique à grande échelle  $\vec{B}_0$ . (La densité de particule n'intervient pas vis à vis des ondes car le problème est auto-similaire.) On peut alors distinguer quatre grands domaines de modélisation, selon que le plasma est considéré chaud ou non et magnétisé ou non :

- **Le modèle froid et non magnétisé.**

On entend ici par "froid" le fait que la vitesse thermique  $v_{th,s} = \sqrt{k_B T_s / m_s}$  de l'espèce  $s$  considérée (électron ou ion) est très inférieure à la vitesse de phase  $v_\varphi$  de l'onde étudiée. On entend par non magnétisé le fait que les pulsations cyclotron sont très inférieures aux pulsations plasma ( $\omega_{ce} \ll \omega_{pe}$  et  $\omega_{ci} \ll \omega_{pi}$ ).

Dans cette double limite, le plasma supporte deux modes : les ondes électromagnétiques transverses (que l'on étudie dans la partie 2), ainsi que les oscillations électrostatiques longitudinales à la pulsation  $\omega_p$  (elles ne se propagent pas car la vitesse de groupe est nulle). La longueur de Debye du plasma est nulle ( $\lambda_{Ds} \propto \sqrt{T_s} \sim 0$

si  $T_s \sim 0$ ). Les relations de dispersion correspondantes sont tracées sur la figure 2 (gauche). On notera que les ondes électromagnétiques transverses existent dans le vide et sont ici modifiées par la réponse du plasma, alors qu'au contraire les oscillations électrostatiques n'existent pas dans le vide. Un tel plasma peut s'étudier avec un modèle fluide sans terme de pression, ou plus simplement en considérant la réponse d'une unique particule (comme souvent dans les manuels de L1 ou L2), auquel cas les effets thermiques sont automatiquement absents.

► **Le modèle chaud et non magnétisé.**

Les ondes électromagnétique transverses restent rigoureusement inchangées (voir démonstration partie 2, mais ceci se comprend déjà en remarquant que leur vitesse de phase est  $v_\varphi > c \gg v_{th,s}$ ). L'oscillation électrostatique longitudinale à  $\omega_p$  devient une onde électrostatique longitudinale (l'onde de Langmuir) avec une vitesse de groupe non nulle. La longueur de Debye devient finie : l'agitation thermique fait que l'écrantage ne peut plus être parfait. Une nouvelle onde apparaît : l'onde sonore ionique, qui est électrostatique et longitudinale et implique à la fois le mouvement des ions et des électrons. Les relations de dispersion correspondantes sont tracées sur la figure 2 (droite). Tous ces phénomènes peuvent s'étudier avec un modèle fluide comme dans la partie 2

Avec une température non nulle apparaît un nouveau phénomène : l'amortissement de Landau des ondes. On peut l'expliquer schématiquement en disant que les particules qui ont une vitesse proche de la vitesse de phase  $v_\varphi$  de l'onde peuvent interagir avec l'onde et échanger de l'énergie avec elle. On montre alors que s'il y a plus de particules ayant une vitesse légèrement inférieure à  $v_\varphi$  que de particules ayant une vitesse légèrement supérieure (ce qui est toujours le cas avec une distribution maxwellienne étant donné qu'elle décroît dans le domaine des vitesses considérées), alors l'onde cède de l'énergie aux particules et est rapidement amortie. On voit que si  $v_{th} \ll v_\varphi$ , alors très peu de particules pourront contribuer et l'amortissement ne sera pas efficace : on retrouve le critère énoncé plus haut pour négliger ou non les effets thermiques. On peut en déduire que les ondes électromagnétiques transverses ne subissent pas cet amortissement car leur vitesse de phase est supra-luminale : il n'y a aucune particule du plasma qui possède cette vitesse. De façon similaire, les ondes de Langmuir ne sont pas amorties si leur vitesse de phase est supérieure à quelque fois la vitesse thermique, car alors trop peu de particules contribuent, mais elles le sont dans le cas contraire. Les ondes sonores ioniques sont souvent amorties. L'étude de l'amortissement de Landau nécessite d'utiliser un modèle cinétique pour le plasma (équation de Vlasov non collisionnelle couplée aux équations de Maxwell, voir [2] pour une introduction, ou [1] pour un traitement plus calculatoire, ou bien [4] pour une interprétation en terme d'absorption/émission Čerenkov).

► **Le modèle froid et magnétisé.**

La présence d'un champ magnétique  $\vec{B}_0$  introduit une anisotropie, et les propriétés des ondes vont alors dépendre de la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  par rapport à  $\vec{B}_0$ . On trouve donc un certain nombre de modes, dont les relations de dispersion font intervenir les pulsations plasma ionique et électronique et les pulsations cyclotron ionique et électronique. En particulier, il existe des ondes ni transverse et ni longitudinale pour le champ électrique ( $\vec{k}$  et  $\vec{E}_1$  forment un angle quelconque). L'onde électromagnétique transverse existe toujours pour une propagation parallèle à  $\vec{B}_0$ , mais elle est modifiée pour toute autre direction. On retrouve le cas non magnétisé dans la limite où  $\omega_{ce} \ll \omega_{pe}$  et  $\omega_{ci} \ll \omega_{pi}$ . On peut utiliser un modèle fluide pour décrire ces ondes, voir par exemple [3].

► **Le modèle chaud et magnétisé.**

On distingue deux cas : la limite basse fréquence et le cas général.

La limite basse fréquence ( $\omega \ll \omega_{ci}$ ) est décrite par le modèle magnétohydrodynamique (MHD). On trouve alors trois type d'ondes : les ondes magnétosoniques lentes et rapides, et les ondes d'Alfvén. Étant une limite basse fréquence, ces ondes ne possèdent pas de propriétés dispersives. La vitesse de phase dépend seulement de la direction de propagation relativement à  $\vec{B}_0$ .

Le cas général nécessite une description cinétique. Le nombre de modes de propagation augmente encore, dépend de la direction de  $\vec{k}$ , et l'amortissement de Landau se manifeste comme précédemment, et également lorsque l'onde fait tourner les particules autour de  $\vec{B}_0$  à une fréquence multiple de la fréquence cyclotron. On peut trouver une introduction à quelques cas dans [2, 3], et un traitement général dans [7].

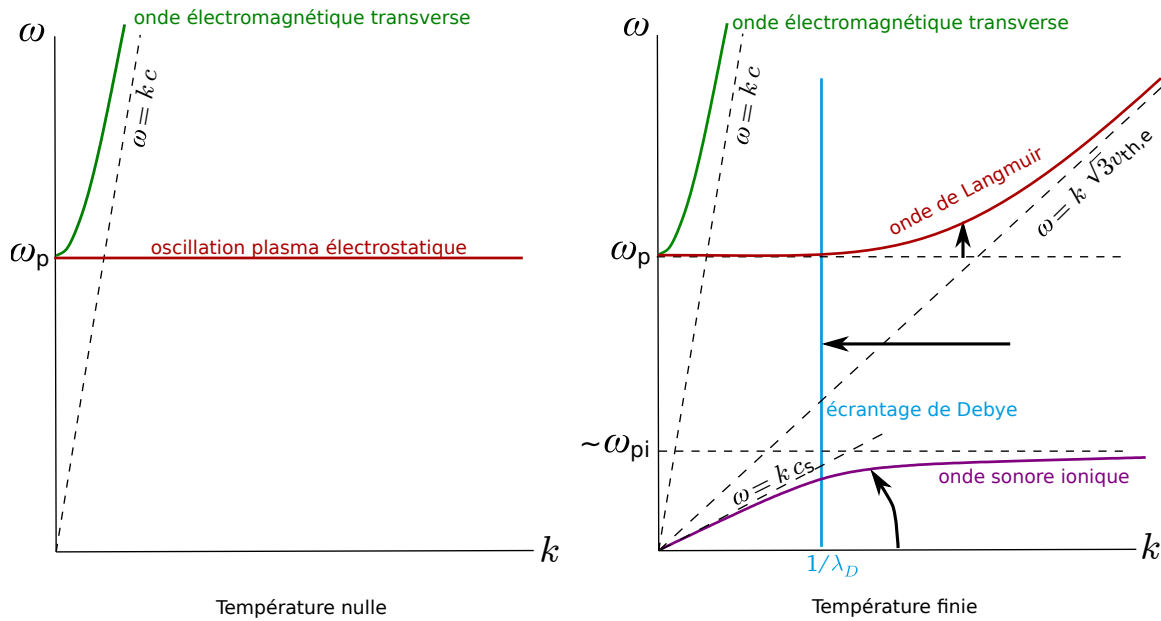


FIGURE 2 – Relation de dispersion  $\omega(k)$  pour l'ensemble des modes dans un plasma homogène non magnétisé, à gauche dans le modèle limite où  $T \rightarrow 0$ , à droite avec une température finie. Les flèches à droite indiquent comment évoluent les différentes courbes lorsque  $T$  augmente. Les expressions des relations de dispersion sont données dans l'annexe.

## 2 Le cas des ondes électromagnétiques transverses dans un plasma non magnétisé

Cette partie présente une étude des ondes électromagnétiques transverses dans un plasma dilué non magnétisé. La discussion de la partie précédente montre qu'il s'agit d'un cas particulier parmi d'autres, mais qui est important car c'est généralement ce type d'ondes qui est excité lorsqu'une onde électromagnétique arrive depuis le vide vers un plasma.

La relation de dispersion de ces ondes est  $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$  et est représentée en vert sur la figure 2. Elle est indépendante de la température. Dans le cas où l'on néglige le mouvement des ions, ce que l'on fera ici pour simplifier, la relation de dispersion devient  $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2c^2$ .

## 2.1 Démonstration

### Hypothèses

Il faut avant tout spécifier l'état du plasma étudié : on suppose ici qu'il est homogène, stationnaire et non magnétisé, totalement ionisé avec  $Z = 1$ . On notera les quantités avant perturbation avec un indice 0, avec les notations usuelles :  $P_{e0}$  la pression électronique,  $P_{i0}$  la pression ionique,  $n_{e0} = n_{i0}$  les densités,  $\vec{B}_0 = \vec{0}$ ,  $\vec{E}_0 = \vec{0}$ ,  $\vec{j}_0 = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_{e0} = \vec{v}_{i0} = \vec{0}$ . On considère, superposé à cet état de repos, que l'onde entraîne une perturbation  $P_{e1}$ ,  $P_{i1}$ ,  $n_{e1}$ ,  $n_{i1}$ ,  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{v}_{e1}$ ,  $\vec{v}_{i1}$ , qui est un infiniment petit d'ordre 1 (tout comme en acoustique). Les quantités totales s'écriront sans indice :  $P_e = P_{e0} + P_{e1}$ , etc.

Il faut également spécifier un modèle pour le plasma. On suppose que les ions sont immobiles pour ce qui concerne la dynamique des ondes étudiées. Ils sont au moins 1836 fois plus lourds que les électrons, or  $dv/dt = qE_1/m$ , donc ils sont mis en mouvement plus lentement d'un facteur  $m_i/m_e$  par rapport aux électrons<sup>3</sup>. Concernant les électrons, on utilise un modèle fluide. On écrit donc les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\partial_t n_e + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0, \quad (1)$$

$$m_e n_e \left( \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_e \right) = -\vec{\nabla} P_e - n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}). \quad (2)$$

Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on a choisi de négliger les effets des collisions électrons-électrons (pas de terme de viscosité) et des collisions électrons-ions (pas de terme de friction), ce qui est largement justifié si le paramètre plasma est grand devant l'unité (voir article précédent).

À l'ordre 1 et étant données nos hypothèses sur les quantités au repos, ces deux équations deviennent :

$$\partial_t n_{e1} + \vec{\nabla} \cdot (n_{e0} \vec{v}_{e1}) = 0, \quad (3)$$

$$m_e n_{e0} \frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P_{e1} - n_{e0} e \vec{E}_1. \quad (4)$$

Ajoutons enfin que nous cherchons explicitement des ondes électromagnétiques transverses, qui vérifieront donc  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 0$ . C'est à partir de cette hypothèse que la démonstration s'oriente vers ce type d'ondes. On pourrait aussi bien faire l'hypothèse d'une onde longitudinale, pour laquelle  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 \neq 0$ , et on aboutirait à la fin sur l'équation de propagation des ondes de Langmuir. On peut par ailleurs montrer que ces deux modes (longitudinal et transverse) sont découplés dans le cas du plasma non magnétisé, et se propagent indépendamment, ce qui justifie de les étudier séparément (voir les remarques pour des détails). Il s'agit donc bien d'une hypothèse de travail arbitraire, et non pas de quelque chose qui se justifie avec des ordres de grandeurs.

Sous forme d'OPPH, la perturbation s'écrit ainsi :

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}_1 \exp i(\omega t - kz), \quad \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{u}_z = 0. \quad (5)$$

### Du côté des équations de Maxwell

On obtient d'abord une relation entre champs et sources en manipulant les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1) - \nabla^2 \vec{E}_1 = -\nabla^2 \vec{E}_1 \quad (6)$$

---

3. On lit parfois que si les températures des ions et des électrons sont égales, alors  $m_i v_{th,i}^2 = m_e v_{th,e}^2$ , donc  $v_{th,i}/v_{th,e} = \sqrt{m_e/m_i} \ll 1$ , donc les ions ne bougent presque pas. Mais ceci n'a en fait aucun rapport avec nos ondes : les vitesses que l'on vient de considérer sont les vitesses thermiques, totalement différentes de la vitesse moyenne  $\vec{v}_e$  qui intervient pour la perturbation créée par l'onde.

car  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 0$  car l'onde est transverse, et d'autre part

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1) &= -\vec{\nabla} \wedge (\partial_t \vec{B}_1) \\ &= -\partial_t (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1) \\ &= -\partial_t (\mu_0 \vec{j}_1 + c^{-2} \partial_t \vec{E}_1),\end{aligned}\tag{7}$$

d'où finalement :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} = \mu_0 \partial_t \vec{j}_1.}\tag{8}$$

On obtient une équation différente de celle de d'Alembert à cause du terme proportionnel à la dérivée du courant : par rapport à une propagation dans le vide, c'est bien la réponse du plasma qui va changer les propriétés de l'onde<sup>4</sup>. Pour pouvoir poursuivre, il faut trouver une relation qui donne le courant  $\vec{j}_1$  en fonction des champs. Ce lien n'est pas fourni par les équations de Maxwell, mais par le modèle du plasma que l'on utilise et qui donne un lien entre les charges et les champs.

### Du côté du modèle pour le plasma : recherche de la relation constitutive

La nature transverse de l'onde et l'équation de Maxwell-Gauss impliquent :  $e(n_{i1} - n_{e1}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 0$ . Comme  $n_{i1} = 0$  (ions immobiles), on en déduit que  $n_{e1} = 0$  : l'onde transverse est incompressible. De l'équation 3 de conservation de la masse, on en déduit que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{e1} = 0$ .

Ensuite, en prenant la divergence de l'équation 4 de conservation de l'impulsion, on obtient que  $\nabla^2 P_{e1} = 0$ . Pour une solution sous forme d'OPPH du même type que 5, ceci implique que  $P_{e1} = 0$ . C'est un résultat important : pour ce type d'onde, la pression reste constante, et la température ne joue plus aucun rôle dans les équations<sup>5</sup>.

On utilise ensuite  $\vec{j}_1 = -en_e \vec{v}_e = -en_{e0} \vec{v}_{e1}$ , d'où d'après l'équation 4 :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = \frac{n_{e0} e^2}{m_e} \vec{E}_1,}\tag{9}$$

qui est la *relation constitutive pour les ondes transverses* qui lie la réponse de la matière aux champs.

### Finalement

On peut dire que l'équation 8 indique comment le mouvement des charges influence les champs, alors que l'équation 9 rend compte de la façon dont les champs modifient le mouvement des charges. On retrouve donc, traduit en équations, la nature des interactions collectives dans un plasma dilué via la boucle "mouvement des charges → champs → mouvement des charges".

En combinant ces deux équations, on arrive finalement à :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \vec{E}_1,}\tag{10}$$

4. Il ne faut donc pas dire que l'on néglige les interactions entre particules : il y a bien interaction entre les électrons via un couplage "mouvement des électrons → champs → mouvement des électrons", sans lequel tout se passerait comme dans le vide !

5. C'est un résultat que l'on rate si on suppose  $T_e = 0$  dès le départ (modèle où on établit l'équation du mouvement en considérant un unique électron, ou modèle fluide sans terme de pression).

avec  $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_{e0}e^2}{\epsilon_0 m_e}}$  la pulsation plasma électronique. La relation de dispersion s'en déduit immédiatement :  $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$ .

## 2.2 Remarques

### ► Avec les ions.

Si l'on veut prendre en compte le mouvement des ions, le traitement n'est pas beaucoup plus compliqué. Il faut ajouter une équation de conservation de la masse et de l'impulsion pour le fluide d'ions (identiques à 1,2), et poursuivre la démonstration. On trouve alors la même relation de dispersion, mais avec  $\omega_p = (1 + m_e/m_i)^{1/2} \omega_{pe}$  à la place de  $\omega_{pe}$ .

### ► Non prise en compte de la force de Lorentz magnétique.

Dans la force de Lorentz, le terme  $\vec{v}_{e1} \wedge \vec{B}_1$  n'est pas considéré car il s'agit d'un terme d'ordre 2. On peut aussi montrer directement qu'il est bien négligeable devant l'action du champ électrique de l'onde : si l'on estime le rapport des deux, que ce soit pour les électrons ou les ions :  $|q\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_1|/|q\vec{E}_1| \sim v_1/(E_1/B_1) \sim v_1/(\omega/k) < v_1/c$ , et on a bien  $v_1/c \ll 1$  dans les cas usuels.

### ► Non prise en compte du terme $(\vec{v}_{e1} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_{e1}$ .

Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on a négligé le terme  $(\vec{v}_{e1} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_{e1}$  car il est d'ordre 2. On peut aussi directement montrer qu'il est négligeable devant  $\partial_t \vec{v}_{e1}$ , le rapport des deux valant :  $(k v_{e1}^2)/(\omega v_{e1}) \sim v_{e1}/(\omega/k) < v_{e1}/c$ .

### ► L'hypothèse transverse.

Nous avons précisé que l'hypothèse transverse est faite explicitement pour les ondes cherchées, et que si nous avions fait l'hypothèse longitudinale nous aurions trouvé les ondes de Langmuir. Mais alors comment être certain que ces deux modes ne sont pas couplés? et qu'il n'existe pas une onde ni longitudinale ni transverse dans le modèle chaud non magnétisé? Il faudrait en fait poursuivre la démonstration sans faire d'hypothèse sur la direction de  $\vec{E}_1$  relativement à  $\vec{k}$ . On manipule alors les équations dans l'espace de Fourier pour les écrire sous une forme matricielle  $M\vec{E}_1 = 0$ , où  $M$  est une matrice qui dépend de  $\vec{k}$  et de  $\omega$ . Des solutions non triviales sont obtenues si et seulement si  $\det M(\vec{k}, \omega) = 0$ , et cette condition donne les relations de dispersion  $\omega_n(\vec{k})$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Les différentes ondes sont obtenues en trouvant, pour chaque valeur de  $\omega_n(\vec{k})$  qui annule  $\det M$ , le vecteur  $\vec{E}_1$  associé qui satisfait  $M\vec{E}_1 = 0$ . Chaque  $\vec{E}_1$ , avec sa relation de dispersion, est un mode indépendant, et tous les modes sont ainsi trouvés. On obtient alors sans surprise les résultats annoncés (mode transverse et mode longitudinal indépendants avec les bonnes relations de dispersion). Cette démarche est effectuée dans le cadre des plasmas froids magnétisés dans [3], et peut être reproduite dans le cas chaud et non magnétisé discuté ici.

### ► Modèle fluide pour un plasma non collisionnel.

Nous avons utilisé un modèle fluide pour décrire le plasma. Nous avons également annoncé dans l'introduction qu'un tel modèle ne se démontre pas en considérant une "particule fluide", mais en effectuant un bilan sur un volume fixe. Il semble en effet maladroit de considérer une particule fluide, puisque dans un plasma dilué on a généralement  $l_{\text{libre parcours moyen}} \gg L_{\text{macroscopique}}$ , et une "particule fluide" ne conserve donc pas son identité : les particules qui la constituent voyagent quasiment en ligne droite. De plus, l'image de la particule fluide peut donner l'impression que le terme  $-\vec{\nabla}P$  est une force causée par les particules voisines qui "tapent" sur celles



de la particule fluide, alors que la pression dans un plasma dilué n'est pas liée aux collisions : il s'agit d'un transfert de quantité de mouvement microscopique dû à l'agitation thermique (voir la discussion dans l'annexe).

On peut en revanche aboutir aux équations fluides en considérant un volume infinitésimal fixe, pour lequel on effectue un bilan de quantité de matière, de mouvement, éventuellement d'énergie, et les équations fluides sont tout à fait appropriées pour l'étude des plasmas. Une telle démonstration est esquissée en annexe.

## Conclusion

Nous avons discuté des types d'ondes se propageant dans un plasma dilué homogène totalement ionisé, selon qu'il est magnétisé ou non magnétisé et selon que l'on néglige les effets thermiques ou non. Brièvement, on peut dire que le cas du modèle froid et non magnétisé est relativement simple, puis que la présence d'un champ magnétique complique la situation en introduisant une anisotropie et en créant de nouveaux modes, et enfin que les effets thermiques font apparaître de nouveaux modes, modifient une partie de ceux existant, et permettent l'amortissement de Landau de certaines ondes. Cet aperçu donne une idée de la richesse et de la complexité du sujet.

Nous avons également détaillé l'étude des ondes électromagnétiques transverses dans un plasma dilué dans le cadre du modèle non magnétisé et chaud, en rapport avec l'étude correspondante au programme de CPGE. La démonstration de la relation de dispersion présentée aux élèves n'a pas à être aussi détaillée que celle présentée ici. Mais quelles que soient les simplifications utilisées, trois points nous semblent essentiels :

- ▶ Ne pas garder implicite l'hypothèse de température nulle qui est faite lorsque le modèle fluide ne comporte pas de terme de pression, ou lorsque l'on établit l'équation d'onde en appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron. Si l'hypothèse est faite, on peut mentionner qu'il se trouve qu'elle n'a pas d'incidence sur le résultat.
- ▶ Annoncer dès le départ que l'on considère une onde transverse ( $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$ ), et ne pas donner l'impression à l'élève que l'on déduit ce caractère transverse de considérations d'ordres de grandeur ou d'autre chose, ni l'impression qu'une onde dans un plasma sera nécessairement transverse. On peut d'ailleurs mentionner qu'il existe des ondes longitudinales compressibles.
- ▶ Ne pas parler de particule fluide, car dans la majorité des plasmas dilués considérés le libre parcours moyen excède largement toute échelle macroscopique, si bien qu'on ne peut pas définir d'échelle mésoscopique au sens habituel. On peut néanmoins toujours utiliser un modèle fluide, mais les équations de celui-ci se démontrent à partir de bilans de masse et de quantité de mouvement sur un volume infinitésimal *fixe*. Les équations restent les mêmes, mais il apparaît alors clairement que le terme de pression dans un plasma n'implique pas les collisions entre particules.

## Annexe 1 : rappel des définitions et expressions des relations de dispersion

On rappelle les définitions des différentes grandeurs apparaissant dans l'article (pour une interprétation physique voir l'article précédent). L'indice  $s$  peut être  $e$  pour les électrons et  $i$  pour les ions. On note  $m_s$  la masse,  $q_s$  la charge,  $n_s$  la densité,  $T_s$  la température

de l'espèce  $s$ ,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. On suppose les ions chargés  $Z$  fois, si bien que  $q_i = Ze$  et  $n_e = Z n_i$ .

Les pulsations plasma et cyclotron et la longueur de Debye pour l'espèce  $s$  sont :

$$\omega_{ps} = \sqrt{\frac{n_s q_s^2}{\epsilon_0 m_s}}, \quad \omega_{cs} = \frac{|q_s| B}{m_s}, \quad \lambda_{Ds} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_s}{n_s q_s^2}}. \quad (11)$$

La pulsation plasma totale est  $\omega_p = (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)^{1/2}$ , et la longueur de Debye totale est  $\lambda_D = (\lambda_{De}^{-2} + \lambda_{Di}^{-2})^{-1/2}$ .

On donne également l'expression des relations de dispersion apparaissant dans la figure 2. Ces expressions peuvent être obtenues à l'aide d'un modèle dit 2-fluides, où l'on considère le fluide d'électrons et celui d'ions séparément : on ajoute un jeu d'équations identique à 1 (conservation de la masse) et 2 (conservation de la quantité de mouvement) mais pour les ions. Ions et électrons sont alors couplés par l'intermédiaire des équations de Maxwell, car ils interviennent tous deux dans la densité de courants et la densité de charges.

Pour les ondes électromagnétiques transverses, on obtient :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (12)$$

Pour les ondes de Langmuir et les ondes sonores ioniques, et contrairement au cas des ondes électromagnétiques, la pression et les effets thermiques interviennent. Il en résulte que les équations fluides utilisées ne suffisent plus : il faut ajouter une relation de fermeture qui relie  $P_s$  à  $n_s$ . On utilise deux cas limites :

- (i) dans le cas où le fluide subit une transformation lente ( $\omega/k \ll v_{th,s}$ ), les échanges de chaleur font que la transformation est isotherme, et on a donc  $P_s/n_s = \text{cst}$  ;
- (ii) dans le cas où la transformation subie est rapide ( $\omega/k \gg v_{th,s}$ ), les échanges de chaleur n'ont pas le temps d'avoir lieu et on suppose la transformation adiabatique, si bien que  $P_s/n_s^{\gamma_s} = \text{cst}$ . Ici  $\gamma_s$  est l'exposant adiabatique, qui vaut 3 dans le cas des ondes de Langmuir et sonores ioniques car les particules ne sont libres de bouger que selon une direction (celle du champ électrostatique de rappel) [1].

On obtient les ondes de Langmuir en supposant électrons et ions adiabatiques ( $\omega/k \gg v_{th,e}, v_{th,i}$ ) :

$$\omega^2 \simeq \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{th,e}^2. \quad (13)$$

On obtient les ondes sonores ioniques dans la limite adiabatique pour les ions et isotherme pour les électrons ( $v_{th,i} \ll \omega/k \ll v_{th,e}$ ). Dans le cas où  $k \ll 1/\lambda_{De}$ , on a :

$$\omega \simeq k \left( \frac{k_B T_e + \gamma_i k_B T_i}{m_i} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

ce qui définit la vitesse sonore ionique  $c_s$  telle que  $\omega = c_s k$ . Voir [1] pour l'expression complète.

Dans la limite isotherme pour ions et électrons, on retrouve l'écrantage de Debye [1].

## Annexe 2 : interprétation des équations fluides comme bilans sur un volumes fixe, interprétation de la pression

Il y a deux façons de parvenir aux équations de conservation du nombre de particules et de la quantité de mouvement pour un fluide : soit en utilisant le point de vue lagrangien

(bilan sur une particule fluide), soit en utilisant le point de vue eulerien (bilan sur un volume fixe). Les équations obtenues sont identiques, mais l'interprétation que l'on donne à la pression diffère. Comme nous l'avons expliqué, le point de vue eulerien est plus approprié pour un plasma, et dans cette annexe nous montrons en quoi il consiste en interprétant les équations fluides 1 et 2 comme des bilans sur un volume  $V$  qui reste fixe dans l'espace, délimité par une surface  $S$ .

Nous considérons soit les électrons soit les ions, et nous omettons l'indice  $e$  ou  $i$ . Commençons par le cas de l'équation de conservation du nombre de particules. Nous avons dit qu'elle s'écrit  $\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{v}) = 0$ . En intégrant sur  $V$  et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V dV n = - \iiint_V dV \vec{\nabla} \cdot (n \vec{v}) = - \oint_S n (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}). \quad (15)$$

L'interprétation est alors claire : le terme de gauche traduit la variation du nombre de particules dans le volume  $V$ , et cette variation est causée par le flux de particules à travers la surface  $S$  (le terme tout à droite).

Passons maintenant à la conservation de la quantité de mouvement. Il est d'abord facile de montrer que l'équation 2 s'écrit aussi sous sa forme "eulerienne" :

$$\frac{\partial}{\partial t} (mnv_k) = -\vec{\nabla} \cdot (mnv_k \vec{v}) - \frac{\partial P}{\partial x_k} + nF_k, \quad (16)$$

où on a abrégé par  $\vec{F}$  la force de Lorentz et où l'indice  $k$  indique la composante  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Mais le terme de pression n'est toujours pas écrit sous la forme d'une divergence et on ne peut donc pas encore l'interpréter après intégration sur le volume  $V$ . Pour cela, il faut d'abord utiliser la définition cinétique du tenseur de pression [1, 6] :

$$P_{kj} = mn \langle v'_{p,k} v'_{p,j} \rangle, \quad (17)$$

où on a décomposé la vitesse de chaque particule  $p$  en

$$\vec{u}_p = \vec{v} + \vec{v}'_p \quad (18)$$

avec  $\vec{v}$  la vitesse moyenne (qui apparaît dans les équations fluides 1 et 2 ou 15 et 16),  $\vec{v}'_p$  la partie "fluctuante" ou "thermique" de la vitesse de la particule, et où  $\langle \cdot \rangle$  indique que l'on prend la moyenne sur la distribution de vitesse de l'ensemble des particules<sup>6</sup>. Les indices  $j$  et  $k$  désignent des composantes ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Pour une distribution des vitesses isotrope ce tenseur est diagonal :

$$P_{kj} = P\delta_{kj} \quad \text{avec la pression scalaire } P = mn \langle (v'_{p,x})^2 \rangle = mn \langle (v'_{p,y})^2 \rangle = mn \langle (v'_{p,z})^2 \rangle \quad (19)$$

et  $\delta_{kj}$  le symbole de Kronecker. Dans le cas général (non isotrope), l'équation 16 s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} (mnv_k) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (mnv_k v_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} mn \langle v'_{p,k} v'_{p,j} \rangle + nF_k, \quad (20)$$

où on somme sur l'indice répété  $j$ . On retrouve bien l'équation 16 si l'on suppose  $P_{kj} = P\delta_{kj}$ , mais la forme plus générale de l'équation 20 permet une meilleure interprétation.

On peut en effet maintenant intégrer cette équation sur le volume  $V$  fixe et utiliser le théorème de la divergence dans le cas d'un tenseur. L'interprétation des différents termes est alors évidente. Le membre de gauche est égal à la variation de quantité de mouvement dans le volume fixe, et celle-ci varie à cause de chacun des termes du membre de droite :

6. Par exemple  $\langle \vec{u}_p \rangle = \vec{v}$  par définition, ou encore pour une distribution à l'équilibre thermique :  $\langle (v'_p)^2 \rangle = 3k_B T/m$  (ce qui est une définition de la température cinétique).

- ▶ Le premier terme à droite, une fois intégré sur le volume et une fois le théorème de la divergence utilisé, s'écrira  $-\oint_S mnv_k (\vec{v} \cdot d\vec{S})$ . Il s'agit de la composante  $k$  de la quantité de mouvement macroscopique (terme  $mnv_k$ ) apportée dans le volume, à travers sa surface, par le mouvement macroscopique du fluide (vitesse  $\vec{v}$ ).
- ▶ Le second terme est tout à fait similaire dans sa forme. Il s'agit donc de la composante  $k$  de la quantité de mouvement microscopique (terme  $mnv'_{p,k}$ ) apportée dans le volume, à travers sa surface, par le mouvement microscopique du fluide (vitesse  $v'_{p,j}$ ).
- ▶ Le troisième terme traduit l'action de la force de Lorentz qui agit sur chacune des particules du volume  $V$  et qui modifie ainsi la quantité de mouvement totale contenue dans  $V$ .

Pour conclure, nous observons que nous avons suivi ici le chemin inverse. Dans les ouvrages de physique des plasmas ou de cinétique des gaz [1, 6], on démontre l'équation "eulérienne" 2 ou 16 à partir d'un bilan sur le volume fixe  $V$  en considérant simplement que (i) chaque particule présente dans le volume voit sa quantité de mouvement modifiée par la force  $\vec{F}$ , ce qui se traduit par une modification de la quantité de mouvement totale ; (ii) lorsqu'une particule de vitesse  $\vec{u}_p$  entre dans ou quitte le volume, la quantité de mouvement du volume doit être augmentée ou diminuée de  $m\vec{u}_p$ . La réalisation technique de ceci n'étant pas si courte, nous ne l'avons pas suivie.

Enfin, nous insistons sur le fait que le terme de pression est d'abord d'origine purement cinématique : sa définition même (équation 17) montre qu'il rend compte de l'apport de quantité de mouvement par le mouvement microscopique des particules qui entrent et sortent d'un volume fixe. Dans un plasma dilué, il n'a aucun rapport avec de quelconques collisions ou avec une force exercée sur les surfaces entourant le volume.

## Remerciements

Je tiens à remercier Étienne Thibierge pour sa relecture et ses commentaires qui ont permis d'améliorer l'article.

## Références

- [1] P. M. Bellan. *Fundamentals of Plasma Physics*. January 2006.
- [2] F. F. Chen. *Introduction to plasma physics and controlled fusion. Vol. I : plasma physics. Second edition*. 1984.
- [3] R. Fitzpatrick. *The Physics of Plasmas*. 2011. URL <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/plasma.html>.
- [4] D. B. Melrose. *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*. April 1989.
- [5] M. Melzani. Une courte introduction à la physique des plasmas dilués. *Bull. Un. Phys.*, 992 :329–342, March 2017.
- [6] D. Mihalas and B. W. Mihalas. *Foundations of radiation hydrodynamics*. 1984.
- [7] T. H. Stix. *Waves in plasmas*. 1992.

Remarque : Les articles à mon nom sont également disponibles sur ma page personnelle.