

# Ondes transverses dans un plasma dilué : proposition d'une démonstration utilisant le "PFD appliqué à un électron" et discussion

Mickaël Melzani  
mickael.melzani@gmail.com  
www.mmelzani.fr

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Proposition de démonstration pour un cours de CPGE</b>	<b>3</b>
<b>2 Les pièges à éviter</b>	<b>6</b>
2.1 On n'a pas $\rho = 0$ parce que le plasma est neutre . . . . .	6
2.2 On ne néglige pas les interactions entre charges . . . . .	7
2.3 Et la force exercée par les ions ? . . . . .	8
2.4 Il n'est pas pertinent d'introduire une force de frottement fluide . . . . .	8
<b>3 Une incursion du côté du modèle fluide</b>	<b>9</b>
3.1 Les équations du modèle fluide . . . . .	9
3.2 Une démonstration du fait que le terme $\vec{\nabla}P$ est négligeable lorsque $v_{th} \ll v_\phi$ . . . . .	10
3.3 Détails sur le modèle fluide : origine, échelle mésoscopique, pression . . . . .	11
<b>4 Retour sur l'approche "PFD appliqué à un électron" : subtilités et justification</b>	<b>13</b>
4.1 Subtilité 1 : Le mélange entre grandeurs lagrangiennes et eulériennes . . . . .	13
4.2 Subtilité 2 : Les produits de deux grandeurs complexes . . . . .	14
4.3 Subtilité 3 : Un mot sur l'hypothèse non relativiste . . . . .	14
4.4 Discussion de la validité de l'approche "PFD appliqué à un électron" . . . . .	14
<b>Conclusion</b>	<b>16</b>

## Abstract

*Les programmes de certaines filières de CPGE s'appuient sur la "propagation d'une onde plane transverse progressive monochromatique dans un plasma localement neutre et peu dense" afin d'étudier la propagation d'une onde dans un milieu dispersif. La démonstration qui aboutit à la relation de dispersion doit être accessible aux étudiants, tout en conservant un certain niveau de rigueur et en ne véhiculant pas d'idées fausses. L'objectif de cet article est d'en fournir un exemple qui suit ces contraintes et qui utilise la méthode du principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron. La première partie expose la démonstration telle qu'elle peut être faite en classe, et la seconde partie souligne des pièges dans lesquels ne pas tomber, comme supposer d'emblée la densité de charge nulle ou affirmer que les charges n'interagissent pas entre elles. Les deux dernières parties sont plus techniques et permettent de justifier la méthode.*

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

## Introduction

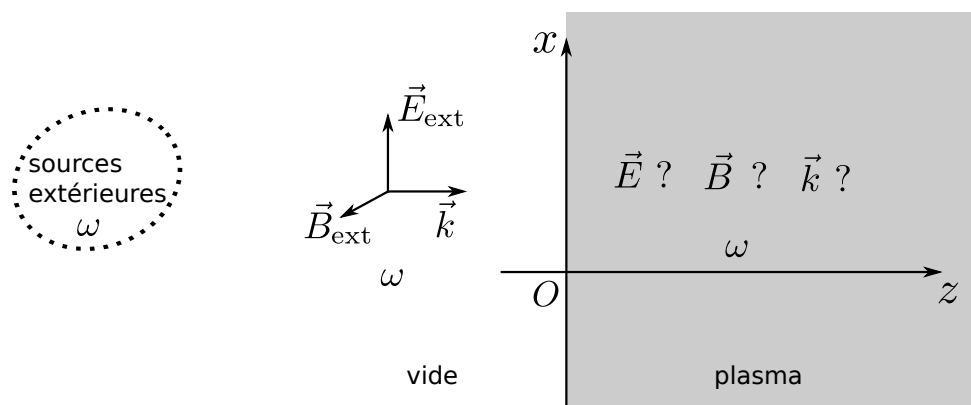
Deux possibilités existent au niveau CPGE pour étudier la propagation d'une onde dans un plasma dilué : utiliser un modèle fluide (équation d'Euler, admise ou obtenue par exemple via le PFD appliqué à une particule de fluide), ou bien appliquer le PFD directement à un unique électron. Sans parler des avantages et inconvénients de chacune, nous constatons simplement que l'une et l'autre sont présentes dans les énoncés de concours et qu'il est donc souhaitable que les étudiants aient abordé les deux.

La première méthode (modèle fluide) est décrite dans un article du BUP [10] de façon rigoureuse, avec certaines remarques et conseils. Il s'agit de la méthode standard que l'on trouve dans les livres de physique des plasmas, elle est claire et ne soulève aucune difficulté. La seconde méthode (PFD à un unique électron) est à la fois plus simple à mettre en œuvre et plus délicate conceptuellement, et nous en proposons une version accessible aux étudiants dans la partie 1. La partie 2 souligne ensuite quelques pièges dans lesquels il ne faut pas tomber lors du déroulement de cette démonstration, les deux plus graves étant d'affirmer que  $\rho = 0$  parce que le plasma est neutre, et d'affirmer que toutes les interactions entre les charges sont négligeables car le plasma est peu dense. Nous expliquerons pourquoi ceci est erroné. Ces deux premières parties sont les plus importantes et sont écrites de façon concise et accessible, et elles peuvent être lues indépendamment des deux suivantes.

La méthode "PFD appliqué à un électron" n'est pas la méthode usuellement employée dans les livres, la raison étant qu'elle n'est pas simple à justifier et qu'elle implique un certain nombre de subtilités. Il faudra donc la dizaine de pages des parties 3 et 4 afin d'aboutir à une justification de cette approche. Ceci nécessite d'abord de se familiariser avec le modèle fluide dans la partie 3, avant de retourner à la méthode PFD dans la partie 4 pour pouvoir conclure sur la justification. Cette conclusion se résume en disant que l'approche est justifiée à condition (i) de négliger la partie fluctuante du champ électrique (hypothèse des collisions coulombiennes négligeables, effectuée quoiqu'il en soit), le champ total étant alors égal au champ moyen mésoscopique, (ii) de supposer la vitesse thermique très inférieure à la vitesse de phase des ondes (hypothèse effectuée pour aboutir au modèle du plasma froid mais en réalité inutile pour les ondes transverses), ce qui permet de négliger les effets thermiques qui se manifesteraient par un terme en gradient de la pression, (iii) de supposer la vitesse thermique très inférieure à la vitesse moyenne mésoscopique (hypothèse superflue pour le modèle du plasma froid mais nécessaire pour justifier la méthode "PFD appliqué à un électron"), ce qui permet de dire que tous les électrons en un point  $M$  à un instant  $t$  ont la même vitesse.

Rappelons enfin que l'on a déjà décrit de façon générale ce qu'est un plasma dit "dilué" (ou neutre et peu dense dans les mots du programme) ainsi que les conditions dans lesquelles il faut se placer pour que cela soit le cas dans l'article [9], et que [10] contient des généralités sur les ondes dans un tel plasma, qui ne sont d'ailleurs pas toutes transverses. Le site internet de l'auteur contient également d'autres ressources, comme par exemple une démonstration des équations fluides en partant de l'équation cinétique de Vlasov.

# 1 Proposition de démonstration pour un cours de CPGE



On considère une onde produite par une source extérieure, de pulsation  $\omega$ , et arrivant depuis le vide sur un plasma dilué.

Dans le vide l'onde est une OPPM que l'on prend polarisée rectilignement :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}, \\ \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (\text{Maxwell-Faraday}). \end{cases} \quad (1)$$

On a donc ici  $\vec{k} = k\vec{e}_z$ , la relation de dispersion est  $\omega = kc$ , et  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  forme un trièdre orthogonal direct.

On s'intéresse à la façon dont l'onde va se propager dans le plasma.

★ On considère un électron non relativiste dans le plasma, de vitesse  $\vec{v}$  et masse  $m$ . Il est soumis à diverses forces :

— Son poids, négligeable car  $\frac{mg}{|e|\|\vec{E}\|} \simeq 10^{-10} \times \frac{1 \text{ V/m}}{\|\vec{E}\|}$ .

— La force de Lorentz  $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , qui comporte deux termes.

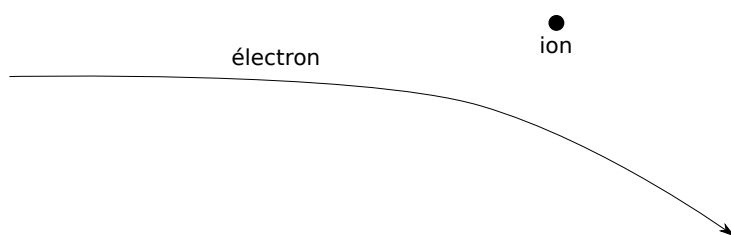
• Le terme magnétique : Pour une OPPM dans le vide on a  $\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{1}{c}$ , et pour l'onde dans

le plasma il faut remplacer  $c$  par la vitesse de phase, supérieure à  $c$  ici. Ainsi  $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \leq$

$\frac{\|\vec{v}\|\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \simeq \frac{v}{v_\varphi} \leq \frac{v}{c} \ll 1$ . On négligera donc la partie magnétique.

• Le terme électrique : On écrit  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{més}} + \delta\vec{E}$ , ou encore  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{onde}} + \vec{e}_{\text{collisions}}$  :

—  $\delta\vec{E}$  est le champ dit fluctuant qui rend compte des interactions à courtes distances entre notre électron et d'autres électrons ou ions. Il est important lorsque l'électron effectue des *collisions coulombiennes* avec les autres charges. Le plasma étant très dilué, ces collisions ne se produisent quasiment jamais : on le néglige, c'est-à-dire qu'on néglige les interactions à courte portée.



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

Exemple d'une collision coulombienne entre un électron et un ion. Ces collisions sont rares et négligées dans un plasma non collisionnel.

- $\vec{E}_{\text{mésos}}$  est le champ dit mésoscopique, produit à la fois par les sources de l'onde à l'extérieur du plasma et par les électrons et ions du plasma de façon collective (collective, par opposition au champ fluctuant produit par une seule ou très peu d'autres charges). C'est ce champ qui se propage dans le plasma. On le recherche sous la forme

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \underline{k}z)}, \quad (2)$$

avec  $\underline{\vec{k}} = k\vec{e}_z$  éventuellement complexe.

On utilise ensuite le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}. \quad (3)$$

Le champ  $\vec{E}$  est pris à la position  $z$  de l'électron. On est en régime sinusoïdal forcé, on cherche donc  $\vec{v}$  sous la forme  $\vec{v} = \underline{\vec{v}}_0 e^{i\omega t}$ , on a donc

$$i\omega m \underline{\vec{v}} = -e \underline{\vec{E}}, \quad (4)$$

d'où

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e}{i\omega m} \underline{\vec{E}}. \quad (5)$$

On introduit ensuite la densité volumique de courants  $\vec{j} = -en\vec{v}$  avec  $n$  le nombre d'électrons par unité de volume. On a supposé ici les ions immobiles car beaucoup plus lourds que les électrons (on pourrait montrer qu'ils contribuent au courant avec un rapport  $m/m_{\text{ion}} \leq 1/1836$ ). On en déduit

$$\underline{\vec{j}} = \frac{ne^2}{i\omega m} \underline{\vec{E}} = \underline{\alpha} \underline{\vec{E}}, \quad (6)$$

qui est la relation constitutive pour le type d'ondes étudiées (OPPM transverses) avec le modèle utilisé (plasma dilué, ions immobiles). Le paramètre  $\underline{\alpha}$  est la conductivité complexe, ici imaginaire pure.

★ **Du côté des équations de Maxwell :** par *hypothèse*, notre onde est *transverse électrique*. Donc  $\text{div} \underline{\vec{E}} = 0$ . (On en déduit donc que  $\rho = 0$  : le passage de l'onde ne crée pas de perturbation de la densité de charges, mais c'est une *conséquence* de la nature transverse.) On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{car onde transverse par hypothèse} \\ \text{div} \underline{\vec{B}} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (7)$$

On peut remarquer que l'onde est également transverse magnétique, et que la relation de structure  $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$  est toujours valide. En particulier si  $\underline{\vec{k}}$  est réel alors  $\|\underline{\vec{B}}\| = \|\underline{\vec{E}}\|/v_\varphi$ .

Avec les équations de Maxwell on arrive facilement à

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{\vec{j}}. \quad (8)$$

★ **On passe ensuite à la relation de dispersion.** On utilise  $\vec{j} = \underline{\alpha} \vec{E}$  dans l'équation précédente, puis après manipulations on arrive à

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}, \text{ avec } \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}.} \quad (9)$$

On peut alors discuter des cas de propagation ou de non propagation :

- Si  $\omega > \omega_p$ , alors  $\underline{k}$  est réel. Il y a propagation. La relation de dispersion est donnée par 9. L'onde s'écrit donc

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \underline{k}z)} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} z/c)}. } \quad (10)$$

On peut calculer la vitesse de groupe, interpréter, etc.

- Si  $\omega < \omega_p$ , alors  $\underline{k}$  est imaginaire pur, l'onde s'écrit

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \underline{k}z)} = E_0 \vec{e}_x e^{i\omega t} \times e^{-\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} z/c} } \quad (11)$$

(on a éliminé la solution qui croît exponentiellement en faisant l'hypothèse que le plasma est infini selon  $+z$ ). C'est une onde évanescente, il n'y a pas propagation dans le plasma. Il n'y a pas non plus dissipation d'énergie : toute l'onde incidente est réfléchi.

★ **Quelques remarques (qui peuvent être adressées aux étudiants) :**

- Les collisions de cœur dur (contact direct entre deux charges) sont plus rares que les collisions coulombiennes (forte déviation par interaction électrostatique lorsque deux charges sont proches). Par collisions ou interactions binaires on entend donc toujours collisions coulombiennes.
- On peut négliger  $\delta \vec{E}$ , et donc les collisions coulombiennes, lorsque le temps moyen entre deux collisions est très grand devant le temps caractéristique du phénomène étudié, qui ici est la période plasma  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ . (Voir [9] pour plus de détails et des ordres de grandeur.)
- Attention, s'il existe un champ magnétique  $\vec{B}_0$  à grande échelle dans le plasma alors on ne peut pas négliger  $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$  devant  $\vec{E}$ .
- Le fait de considérer un unique électron et de lui appliquer le PFD fait que tout effet de température est négligé. On a en effet considéré que la vitesse  $\vec{v}$  d'un électron ne comporte pas de partie thermique fluctuante. Ceci revient à dire que la température est nulle. Il n'y a en particulier pas d'effets de la pression. On peut affirmer que :
  - De manière générale, on peut négliger tout effet thermique lorsque la vitesse de phase de l'onde  $v_\varphi$  et la vitesse thermique moyenne  $v_{th} = \sqrt{k_B T/m}$  vérifient  $v_\varphi \gg v_{th}$  (voir démonstration §3.2). L'onde oscille alors tellement rapidement que pendant une période l'électron apparaît comme figé dans son mouvement thermique. Comme ici  $v_\varphi \geq c$  et que raisonnablement  $v_{th} < c$ , on a bien cette inégalité.
  - Dans le cas particulier des ondes transverses étudiées ici, on peut montrer que la température n'a en fait aucun rôle, il ne s'agit alors pas d'une approximation (voir [10]).
- On a étudié une onde transverse. Il existe aussi des ondes longitudinales ( $\vec{E}$  et  $\vec{k}$  parallèles) dans les plasmas dilués non magnétisés. On a alors  $\rho \neq 0$  (voir [10]).

## 2 Les pièges à éviter

Cette partie 2 met en évidence certaines erreurs ou imprécisions parfois commises dans la démonstration de la partie 1.

### 2.1 On n'a pas $\rho = 0$ parce que le plasma est neutre

Il est tentant de dire que comme le plasma est localement neutre alors  $\rho = 0$ . Mais pas du tout. Dans l'état de repos, donc en l'absence de l'onde, on a  $\rho_0 = 0$ ,  $\vec{j}_0 = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , etc... Mais le passage de l'onde perturbe toutes ces quantités, on a alors  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ ,  $\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_1$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ , et on a a priori  $\rho_1 \neq 0$ ,  $\vec{j}_1 \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ , etc...

On a cependant bien  $\rho = 0$ , mais pour une raison bien précise : ici on étudie par hypothèse une onde transverse électrique<sup>1</sup>,  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ . Ainsi via l'équation de Maxwell-Gauss on a  $\rho = \varepsilon_0 \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ . Le fait que le plasma reste neutre est une \*conséquence\* de l'\*hypothèse transverse\*. Il ne faut pas faire le raisonnement à l'envers<sup>2</sup>.

En particulier il existe des ondes (les ondes dites de Langmuir) qui sont longitudinales ( $\vec{E}$  parallèle à  $\vec{k}$ ) et pour lesquelles  $\rho \neq 0$ . Si on suppose d'emblée  $\rho = 0$  sous le faux prétexte "plasma neutre", on ne risque pas de pouvoir les étudier...

De façon générale, la dénomination plasma neutre ne signifie pas du tout que  $\rho = 0$  en toutes circonstances. Elle indique qu'il y a autant de charges positives que négatives, et il en résulte que  $\rho = 0$  pour des phénomènes de longueur spatiale grande devant la longueur de Debye et lents devant la période plasma (voir [9] §2.3). À des échelles spatiales plus petites et à des échelles de temps plus rapides il peut y avoir écart à la neutralité.

1. Ceci est explicitement demandé par le programme. Outre le fait que les propriétés de cette onde sont sympathiques et permettent de discuter la dispersion, il s'agit aussi plus concrètement du type d'onde qui se propage lorsqu'arrive, depuis le vide, une OPPM (qui elle est automatiquement transverse).

2. Une autre remarque sur un argument parfois rencontré. Supposons que l'onde n'est pas transverse :  $\vec{k} \cdot \vec{E}$  et donc  $\rho$  sont a priori non nuls. Alors, en utilisant l'équation de conservation de la charge, puis la relation  $\vec{j} = \alpha \vec{E} = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega} \vec{E}$  (qui reste valable), puis l'équation de Maxwell-Gauss, on montre que :

$$\begin{aligned}
 i\omega\rho - i\vec{k} \cdot \vec{j} &= 0 \\
 i\omega\rho - i\vec{k} \cdot \left( \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega} \vec{E} \right) &= 0 \\
 \rho - \left( -\frac{i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2} \right) \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\
 \rho - \left( -\frac{i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\rho}{-i\varepsilon_0} &= 0 \\
 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \rho &= 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

On en conclut que si  $\omega \neq \omega_p$ , alors  $\rho = 0$  et donc  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ , l'onde est nécessairement transverse. Ce n'est pas faux. Mais :

- Le cas  $\omega = \omega_p$  n'est pas anecdotique, car pour cette pulsation on a ce que l'on appelle les oscillations électrostatiques de Langmuir, qui sont longitudinales. Alors  $\rho \neq 0$ .
- Ces oscillations longitudinales existent en fait à d'autres fréquences, mais pour le mettre en évidence il faut prendre en compte les effets thermiques (qui sont implicitement négligés dans l'approche "PFD appliqué à un électron" qui est un modèle du plasma dit froid). On montre alors [1, chap. 4] que la relation de dispersion de ces ondes longitudinales est

$$\omega^2 \simeq \omega_p^2 + 3k^2 v_{th}^2, \tag{13}$$

ainsi toutes les pulsations supérieures à  $\omega_p$  sont possibles.

En conclusion la situation n'est pas aussi simple que le laisse penser le modèle du plasma froid, et on peut bien avoir des ondes avec  $\rho \neq 0$  même si  $\omega \neq \omega_p$ .

Il serait donc bon que les sujets de concours cessent de pousser explicitement les candidats à tenir le raisonnement erroné inverse (qui consiste à dire que le plasma est neutre donc  $\rho = 0$  donc  $\text{div } \vec{E} = 0$ )...

## 2.2 On ne néglige pas les interactions entre charges

On pourrait penser que le plasma étant dilué, on néglige les interactions entre l'électron considéré et les autres électrons ou ions. C'est tout à fait erroné. Si on négligeait les interactions entre charges, alors l'onde se propagerait comme dans le vide. Or le champ électrique

$$\vec{E}_{\text{ext}} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \omega z/c)} \quad (14)$$

produit par les sources extérieures et arrivant sur le plasma ne se retrouve pas du tout tel quel dans le plasma, le champ étant alors donné par

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} z/c)} & \text{si } \omega > \omega_p \\ \vec{E} &= E_0 \vec{e}_x e^{i\omega t} \times e^{-\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} z/c} & \text{si } \omega < \omega_p, \end{aligned} \quad (15)$$

ce qui est bien différent de  $\vec{E}_{\text{ext}}$ . Le principe de superposition permet d'écrire que le champ des équations 15 est la somme du champ  $\vec{E}_{\text{ext}}$  produit par les sources extérieures et du champ  $\vec{E}_{\text{charges plasma}}$  produit par les charges du plasma. Ce dernier n'est donc mathématiquement pas nul.

Au niveau des équations, cette influence des charges du plasma est contenue dans le terme en  $\vec{j}$  dans l'équation 8 qui distingue cette équation de celle de D'Alembert : les mouvements collectifs d'électrons forment des courants, qui produisent un champ magnétique et électrique. Notons que ces mouvements collectifs n'induisent pas de création de densité de charge (nous avons vu que  $\rho$  reste nul), donc la modification des champs ne passe que par le courant.

En revanche, le caractère dilué du plasma permet de négliger les interactions à courte portée entre charges. Ces interactions sont apparentées à des interactions binaires entre deux charges, il s'agit de collisions coulombiennes : par exemple un électron s'approche d'un autre électron et est significativement dévié par l'interaction électrostatique entre les deux. De même avec un ion. (Notons que les collisions de cœur dur sont plus rares encore et on ne les mentionne même pas.)

Comment alors expliquer clairement et rapidement les choses ?

Une possibilité est d'introduire la décomposition  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{més0}} + \delta\vec{E}$  utilisée dans la partie 1.

- La partie  $\vec{E}_{\text{més0}}$  résulte de mouvements collectifs d'un grand nombre de charges. Ce champ est produit par des écarts à la neutralité  $\rho \neq 0$  et/ou par des courants  $\vec{j}$ . C'est ce champ qui apparaîtrait dans un modèle fluide du plasma. Il est la somme du champ  $\vec{E}_{\text{ext}}$  produit par les sources à l'extérieur du plasma, et du champ créé par les mouvements collectifs dans le plasma.
- La partie  $\delta\vec{E}$  est le champ électrique en jeu lors de collisions coulombiennes entre deux charges. Il est fluctuant, possède un caractère aléatoire. Dans un modèle fluide ce champ n'est pas présent directement, mais il se traduirait dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour le fluide d'électrons par un terme de viscosité pour les collisions électrons-électrons, ou par un terme de frottement fluide pour les collisions électrons-ions (voir [7] chap. 3 ou [1] chap. 2.5).

Dans un plasma dilué "non collisionnel", on fait l'hypothèse  $\delta\vec{E} = \vec{0}$ , et donc le champ total est  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{més0}}$ .

En conclusion, on peut dire qu'on néglige les interactions binaires à courte portée (les collisions), mais certainement pas les interactions collectives entre charges.

### 2.3 Et la force exercée par les ions ?

Une parenthèse concernant les ions qui fait suite au point précédent. Comme indiqué dans la partie 1, les champs  $\vec{E}_{\text{més0}}$  et  $\delta\vec{E}$  contiennent les contributions des électrons et des ions. Il n'est donc pas nécessaire de traiter la contribution ionique à part.

En particulier, ils contribuent au champ fluctuant lors de collisions électron-ion, trop rares pour être prises en compte dans un plasma dilué, et au champ mésoscopique à la fois pour compenser le champ électrostatique créé par les électrons (et maintenir  $\rho = 0$ ), et dans la densité volumique de courants si on prend en compte leur mouvement.

### 2.4 Il n'est pas pertinent d'introduire une force de frottement fluide

Il est tentant de rendre compte des collisions en introduisant dans le PFD une force de frottement fluide, de la forme  $-\frac{m\vec{v}}{\tau}$ . Ceci est à éviter, pour plusieurs raisons :

- Un électron seul n'est pas soumis à ce type de force. Il s'agit d'une force fluide, qui peut apparaître dans le cadre d'un modèle fluide après un bilan sur un volume mésoscopique ou sur un grand nombre d'électrons, mais pas lorsque l'on considère un unique électron. (Et de la même façon, un unique électron ne ressent pas de force de pression du type  $-\vec{\nabla}P$  car il s'agit également d'un effet fluide.)

On introduit pourtant bien une force en  $-\frac{m\vec{v}}{\tau}$  dans le modèle de Drude pour rendre compte des collisions entre l'électron et le réseau. Mais il s'agit d'un raccourci qui, bien que correct au final, mélange les points de vue "particule" et "fluide".

- Dans le cadre d'un modèle fluide, dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour les électrons :
  - Les collisions entre électrons et ions se traduisent par un terme de frottement en  $-m\frac{\vec{v} - \vec{v}_{\text{ion}}}{\tau}$ .
  - Les collisions entre électrons et électrons ne peuvent pas donner lieu à un tel terme, car ceci violerait la conservation de la quantité de mouvement du fluide d'électrons (il ne peut pas se faire perdre de la quantité de mouvement à lui-même). En réalité les collisions électrons-électrons se manifestent par des termes non diagonaux dans le tenseur de pression et donc, de façon équivalente, par une viscosité. Dans un modèle simple il s'agit d'un terme en  $\eta\nabla^2\vec{v}$ . Voir encore [7] chap. 3 ou [1] chap. 2.5.

La situation est donc plus complexe qu'il n'y paraît, et mieux vaut dire qu'on néglige les collisions via une discussion analogue à celle de la partie 2.2 (on peut d'ailleurs discuter des ordres de grandeurs, cf [10]), mais sans toutefois forcer l'apparition d'un terme collisionnel dans les équations.



### 3 Une incursion du côté du modèle fluide

L'objectif des parties 3 et 4 est d'aboutir à une justification de l'approche "PFD appliqué à un électron". Ce sont des parties plus techniques et moins nécessaires que les deux premières.

Dans la partie 4 nous utiliserons souvent le modèle fluide pour le comparer à l'approche "PFD appliqué à un électron", ou pour justifier certains points. Nous commençons donc par donner des détails sur ce modèle fluide. Seules les parties 3.1 et 3.2 sont nécessaires à la lecture de la partie 4.

#### 3.1 Les équations du modèle fluide

Il faut avant tout spécifier l'état du plasma étudié : on suppose ici qu'il est homogène, stationnaire et magnétisé, totalement ionisé avec  $Z = 1$ . On notera les quantités avant perturbation avec un indice 0, avec les notations usuelles :  $P_{e0}$  la pression électronique,  $P_{i0}$  la pression ionique,  $n_{e0} = n_{i0}$  les densités numériques,  $\vec{B}_0$  uniforme,  $\vec{E}_0 = \vec{0}$ ,  $\vec{j}_0 = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_{e0} = \vec{v}_{i0} = \vec{0}$ . On considère, superposé à cet état de repos, que l'onde entraîne une perturbation  $P_{e1}$ ,  $P_{i1}$ ,  $n_{e1}$ ,  $n_{i1}$ ,  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{v}_{e1}$ ,  $\vec{v}_{i1}$ , qui est un infiniment petit d'ordre 1 (tout comme en acoustique). Les quantités totales s'écriront sans indice :  $P_e = P_{e0} + P_{e1}$ , etc. On introduit également la vitesse thermique  $v_{th,e} = \sqrt{k_B T_e / m_e}$ .

On utilise les équations fluides pour les électrons :

$$\begin{cases} \partial_t n_e + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0, \\ m_e n_e \left( \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_e \right) = -\vec{\nabla} P_e - n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}), \end{cases} \quad (16)$$

où dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement on a choisi de négliger les effets des collisions électrons-électrons (pas de terme de viscosité) et des collisions électrons-ions (pas de terme de friction), ce qui est largement justifié si le paramètre plasma est grand devant l'unité (voir [9]). On a les mêmes équations pour le fluide d'ions, avec un indice  $i$  pour les différentes quantités. Ces équations sont supplémentées par les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = e \frac{n_i - n_e}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 e (n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (17)$$

dans lesquelles  $\vec{j}$  et  $\rho$  font le lien entre charges et champs (et donc aussi entre électrons et ions). Les grandeurs  $\vec{v}_e$ ,  $n_e$ ,  $P_e$ ,  $\vec{j}_e$ ,  $\rho_e$  sont des grandeurs euleriennes, c'est-à-dire du type  $n_e(M, t)$  avec  $M$  fixe, et mésoscopiques, c'est-à-dire définies par une moyenne sur un volume  $d^3x$  mésoscopique (on dit aussi nivelées ou lissées ou fluides). Le fait d'utiliser  $\rho$  et  $\vec{j}$  mésoscopiques dans les équations de Maxwell implique automatiquement que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont les champs mésoscopiques également (ou lissés, ou nivelés), et n'incluent pas la contribution liée aux champs microscopiques fluctuants traduisant les collisions (encore une fois, l'effet des collisions apparaîtrait via une viscosité ou des frottements).

Ces équations ne sont pas fermées, car on ne connaît pas l'expression de la pression. La loi des gaz parfaits  $P_e = n_e k_B T_e$  n'aide pas puisqu'on ne connaît rien sur la température. Il faut en fait ajouter une relation de fermeture qui relie  $P_e$  à  $n_e$ . On peut utiliser deux cas limites :

- (i) dans le cas où le fluide subit une transformation lente ( $\omega/k \ll v_{th,e}$ ), les échanges thermiques font que la transformation est isotherme, et on a donc  $P_e/n_e = \text{cst}$  ;

- (ii) dans le cas où la transformation subie est rapide ( $\omega/k \gg v_{\text{th},e}$ ), les échanges thermique n'ont pas le temps d'avoir lieu et on suppose la transformation adiabatique, si bien que  $P_e/n_e^{\gamma_e} = \text{cst}$ . Ici  $\gamma_e$  est l'exposant adiabatique dont la valeur dépend du nombre de dimensions selon lesquelles peut se faire le mouvement des charges.

À l'ordre 1 et étant données nos hypothèses sur les quantités au repos, les équations précédentes deviennent :

$$\partial_t n_{e1} + n_{e0} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{e1} = 0, \quad (18)$$

$$m_e n_{e0} \frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P_{e1} - n_{e0} e (\vec{E}_1 + \vec{v}_{e1} \wedge \vec{B}_0). \quad (19)$$

$$\frac{P_{e1}}{P_{e0}} = \gamma_e \frac{n_{e1}}{n_{e0}} \quad \text{si limite adiabatique} \quad \text{ou} \quad \frac{P_{e1}}{P_{e0}} = \frac{n_{e1}}{n_{e0}} \quad \text{si limite isotherme} \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E}_1 = e \frac{n_{i1} - n_{e1}}{\varepsilon_0} \\ \text{div } \vec{B}_1 = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 = \mu_0 e (n_{i0} \vec{v}_{i1} - n_{e0} \vec{v}_{e1}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (21)$$

C'est à partir de ces équations linéarisées qu'il est possible d'étudier les différentes ondes se propageant dans le plasma. Ceci est fait dans le cas de l'onde transverse électromagnétique dans [10], la démonstration étant alors claire et sans ambiguïtés. Nous ne la reproduisons pas ici.

### 3.2 Une démonstration du fait que le terme $\vec{\nabla} P$ est négligeable lorsque $v_{\text{th}} \ll v_\varphi$

Il est possible de négliger le terme en gradient de la pression dans l'équation fluide de la conservation de la quantité de mouvement, à condition que la vitesse thermique électronique soit très inférieure à la vitesse de phase de l'onde. C'est ce que nous démontrons dans cette partie.

On utilise les équations fluides linéarisées (18, 19, 20). On oublie les indices  $e$  sur  $P$ ,  $T$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $\vec{v}$  ou encore  $v_{\text{th}}$  pour alléger les notations.

Que l'on soit dans la limite adiabatique, isotherme ou entre les deux, on voit qu'on a en ordre de grandeur

$$P_1 \simeq n_1 \frac{P_0}{n_0}. \quad (22)$$

Or  $\frac{P_0}{n_0} = k_B T_0$  par la loi des gaz parfaits, et on a par définition  $m v_{\text{th}}^2 = k_B T_0$ , d'où :

$$P_1 \simeq n_1 m v_{\text{th}}^2. \quad (23)$$

On utilise ensuite l'équation 18 de conservation du nombre de charges, qui donne en ordre de grandeur :

$$n_1 \simeq n_0 \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_1}{\omega}. \quad (24)$$

On a donc

$$P_1 \simeq n_0 \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_1}{\omega} m v_{\text{th}}^2. \quad (25)$$

On voit intuitivement que si l'onde est transverse on aura  $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$ , donc la perturbation en pression est identiquement nulle et on peut arrêter la démonstration ici. On montre en effet dans [10] que le terme en  $-\vec{\nabla} P_{e1}$  disparaît des équations pour une onde transverse sans plus d'hypothèses. Mais poursuivons pour le cas général. On a donc

$$P_1 \simeq n_0 \frac{v_1}{\omega/k} m v_{\text{th}}^2, \quad (26)$$

avec donc  $\omega/k = v_\varphi$ . On souhaite comparer le terme de pression au terme  $mn_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$  par exemple. Ce dernier est d'ordre  $mn_0 \omega v_1$ . On a donc finalement le résultat attendu :

$$\boxed{\frac{\|mn_0 \partial_t \vec{v}_1\|}{\|\vec{\nabla} P_1\|} \simeq \left(\frac{v_{\text{th}}}{v_\varphi}\right)^2.} \quad (27)$$

### 3.3 Détails sur le modèle fluide : origine, échelle mésoscopique, pression

La lecture de cette partie n'est pas nécessaire pour aborder la suite de l'article. Elle apporte quelques précisions supplémentaires sur le modèle fluide.

#### 3.3.1 Construction

Plusieurs options plus ou moins puissantes existent pour aboutir aux équations fluides. On s'intéresse aux électrons seulement (on peut faire de même pour les ions).

1. L'idée de la première option est d'introduire la fonction de distribution dans l'espace des phases pour les électrons :  $f(\vec{x}, \vec{v}, dt) d^3x d^3v$  indique le nombre d'électrons se trouvant dans le volume  $d^3x$  autour de  $\vec{x}$  et possédant une vitesse  $\vec{v}$  à  $d^3v$  près, le tout à l'instant  $t$ . (On introduit une autre fonction  $f_i(\vec{x}, \vec{v}, dt)$  pour les ions.) Il faut aboutir à une équation portant sur cette fonction. Dans le détail deux procédures existent, voir [7] chap. 3 ou [1] chap. 2 pour la première (méthode de Klimontovich) et [2] chap. 2 pour la seconde (hiérarchie BBGKY). Il est possible d'inclure l'effet des collisions et corrélations de façon assez détaillée grâce à ce formalisme (opérateur de collisions de Boltzmann pour un gaz, de Landau, de Fokker-Planck ou de Balescu pour un plasma...). Mais si on néglige d'emblée toute collision ou corrélation entre petits nombre de charges et qu'on ne se soucie pas de l'opérateur de collision, alors on peut montrer plus simplement que l'on arrive à l'équation cinétique dite de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{-e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (28)$$

Cette équation peut être utilisée ainsi (associée aux équations de Maxwell) afin d'étudier la dynamique du plasma. Il s'agit d'une équation cinétique, qui fournit une description beaucoup plus précise que les équations fluides car elle porte sur la fonction de distribution  $f$ . Elle capture ainsi des effets cinétiques comme l'amortissement de Landau ou des instabilités non collisionnelles qui ne peuvent pas être étudiés autrement. Néanmoins, si on veut parvenir aux équations fluides il suffit de prendre des moments de cette équation : une intégration de l'équation selon  $\int d^3v$  donne l'équation de conservation du nombre d'électrons, une intégration selon  $\int d^3v \vec{v}$  donne l'équation de conservation de la quantité de mouvement, celle selon  $\int d^3v m v^2 / 2$  la conservation de l'énergie, etc. Voir [1, chap. 2], [7, chap. 3], ou encore le document présent sur le site de l'auteur.

2. Un autre point de vue, peut-être plus intuitif, est de réaliser un bilan de nombre d'électrons, de quantité de mouvement, d'énergie, entrant et sortant dans un volume mésoscopique  $d^3x$  fixe. Ceci est esquissé dans l'annexe 2 de [10].
3. Dans le cadre du programme de CPGE, on peut éventuellement justifier le modèle fluide en appliquant le PFD à une particule de fluide, même si ceci est discutable pour un plasma dilué, voir [10].

#### 3.3.2 L'échelle mésoscopique dans un plasma dilué

Le volume mésoscopique  $d^3x$  qui intervient dans le processus de moyennage du modèle fluide doit ([11] chap. 3 ou [5] chap. 5) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

- Être assez grand pour contenir un grand nombre de charges afin que les grandeurs moyennées ne fluctuent pas. On impose donc  $nd^3x \gg 1$ , soit  $dx \gg n^{-1/3}$ .
- Être assez petit pour conserver une information locale. Le critère retenu est  $dx \ll \lambda_D$  avec  $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}$  la longueur de Debye (électronique ici, voir [9] pour sa définition), car si on atteint la longueur de Debye on sait que l'on va avoir des variations significatives de densité (on peut par exemple passer de zones quasi-neutres à des zones avec excès de charges). Ainsi la longueur de Debye sert en fait de longueur macroscopique au-delà de laquelle on sait que les propriétés moyennes varient significativement.

Dans un plasma dilué le paramètre plasma  $\Lambda \equiv n\lambda_D^3$  est très grand devant 1, on a donc  $n^{-1/3} \ll \lambda_D$ , ce qui garantit qu'il existe bien une taille intermédiaire mésoscopique  $dx$  telle que

$$n^{-1/3} \ll dx \ll \lambda_D. \quad (29)$$

Cette taille est celle sur laquelle sont définies les grandeurs fluides. On remarquera en particulier que le libre parcours moyen n'intervient pas dans sa définition, heureusement car celui-ci est très supérieur à  $\lambda_D$  et même aux longueurs macroscopiques en jeu. Enfin, on peut comparer l'ordering 29 à celui dans un gaz neutre, où l'échelle mésoscopique  $dx$  vérifie  $l_{\text{libre parcours}} \ll dx \ll L_{\text{macroscopique}}$ , ce qui est bien différent.

### 3.3.3 Interprétation de la pression

La pression est traditionnellement associée à une force par unité de surface causée par les collisions des particules contre la surface en question. Mais comment interpréter ce terme dans un plasma où le rôle des collisions est négligeable ?

Il faut d'abord dire que la pression est un concept macroscopique, utilisé dans la théorie thermodynamique ou cinétique, mais qui n'a pas d'existence microscopique : une particule seule n'est pas soumise à une force de pression. Le concept possède toutefois bien une interprétation microscopique, qui est complexe et qui n'est pas la même dans un solide, un liquide, un gaz ou un plasma (voir par exemple [3, 4, 12, 6] pour les liquides et gaz), mais qui finalement se manifeste par un même terme dans les équations macroscopiques. Ce terme prend la forme la plus générale d'un tenseur et traduit des actions dans toutes les directions.

Pour les plasmas (et d'ailleurs pour les gaz également) nous avons mis en évidence dans [10] (annexe 2) que la pression est d'origine purement cinétique : si l'on fixe un volume mésoscopique et que l'on effectue un bilan de quantité de mouvement entrant et sortant du volume, alors on aboutit au terme en  $-\vec{\nabla} \cdot \vec{p}$ , avec  $\vec{p}$  le tenseur de pression. Si celui-ci est diagonal et même du type  $-p\vec{I}$  avec  $\vec{I}$  la matrice identité, alors ce terme s'écrit  $-\vec{\nabla}p$ . Si on utilise la loi des gaz parfaits,  $p$  est proportionnel à la densité de particules  $n$  et à la température  $T$  et on comprend alors que s'il y a plus de particules à droite qu'à gauche ( $\vec{\nabla}n \neq \vec{0}$ ) ou des particules portant plus de quantité de mouvement microscopique à droite qu'à gauche ( $\vec{\nabla}T \neq \vec{0}$  car  $T$  contrôle la vitesse microscopique ou thermique), alors le bilan de quantité de mouvement à travers le volume est non nul. Il se traduit justement par le terme  $-\vec{\nabla} \cdot \vec{p}$  sur l'équation bilan. Si le tenseur de pression n'est pas diagonal alors on appelle tenseur de viscosité sa partie non diagonale. Notons que dans un plasma dilué le tenseur de pression est inconnu en général, il n'est que rarement diagonal, et il est fixé par les processus collisionnels ou de fluctuations ou d'instabilités microscopiques, qui fixent la forme de la fonction de distribution  $f$  des vitesses et donc la dépendance des termes non diagonaux. Il s'agit là d'un domaine actif de recherche.

Enfin, lorsque l'on place un élément solide dans le gaz ou le plasma (une paroi par exemple), il s'exerce une force par unité de surface donnée par la pression fois la surface, et ceci s'interprète bien (et se démontre même) en terme de collisions. Mais l'interprétation pour la pression au sein du gaz ou du plasma est celle donnée précédemment : un transfert de quantité de mouvement.

## 4 Retour sur l'approche "PFD appliqué à un électron" : subtilités et justification

Cette partie 4 revient sur la démonstration qui utilise le PFD appliqué à un électron. Les sous-parties 4.1, 4.2 et 4.3 abordent des subtilités inhérentes à cette approche, qui tendent à montrer que ce n'est pas l'approche la plus naturelle. La sous-partie 4.4 termine en montrant sous quelles hypothèses l'approche PFD est justifiée.

### 4.1 Subtilité 1 : Le mélange entre grandeurs lagrangiennes et eulériennes

L'approche "PFD appliqué à un électron" mélange des grandeurs que l'on peut qualifier de lagrangiennes (la vitesse  $\vec{v}(t)$  de l'électron considéré, sa position  $\vec{x}(t)$ ), et des grandeurs eulériennes (le champ  $\vec{E}(M, t)$ , la densité de courants  $\vec{j}(M, t)$ , de façon générale toutes les grandeurs intervenant dans les équations fluides), et l'écriture de relations entre les unes et les autres peut soulever des interrogations.

On a par exemple un mélange entre quantités lagrangiennes et eulériennes lorsque l'on définit la densité de courant :

$$\vec{j}(M, t) = -en(M, t)\vec{v}(t), \quad (30)$$

et nous reviendrons sur cette relation dans la partie 4.4 pour discuter de cette approche. Quoiqu'il en soit, cette relation est à comprendre en notant que le point  $M$  est celui où passe l'électron à l'instant  $t$ .

Un autre exemple important concerne le PFD appliqué à l'électron, qui s'écrit en fait

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -e\vec{E}(\vec{x}(t), t), \quad (31)$$

le champ électrique étant évalué à la position de l'électron. Or on veut écrire lors de la démonstration que

$$\vec{E}(\vec{x}(t), t) = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}(t))} = \underline{\text{cst}} \times \vec{e}_x e^{i\omega t}. \quad (32)$$

Il faut donc que le facteur  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}(t)}$  soit quasi-constant pour  $\vec{x}(t)$  décrivant la zone de déplacement de l'électron.

- Ici l'onde étant transverse et le plasma froid ( $v_{\text{th}}$  négligeable), la vitesse de l'électron est selon  $\vec{e}_x$ . Or le champ électrique est uniforme dans tout plan  $(M, x, y)$ . C'est donc bien toujours le cas.
- Mais pour une onde non transverse ou une vitesse thermique non négligeable il faudrait faire une hypothèse de petits déplacements (devant la longueur d'onde) pendant une période de l'onde, c'est-à-dire  $\frac{v/\omega}{\lambda} \ll 1$ , soit donc  $\frac{v}{v_\varphi} \ll 1$ , avec  $v$  la vitesse de l'électron, somme de la vitesse moyenne  $v_{\text{més0}}$  et de la vitesse fluctuante thermique  $v_{\text{th}}$  (en ordre de grandeur). On a nécessairement  $v_{\text{th}} \ll v_\varphi$  si on souhaite utiliser le modèle où l'on applique le PFD à un électron (voir 4.4), et on a  $v_{\text{més0}} \ll v_\varphi$  ou pas selon l'amplitude de l'onde et donc selon l'amplitude du champ électrique en V/m. Si ce n'est pas le cas des effets non linéaires apparaissent et le traitement linéaire sous entendu ici n'est plus valide.

Notons que dans le cadre d'un modèle fluide ces problèmes n'apparaissent pas, puisque l'on travaille uniquement avec des quantités fluides (eulériennes). Il est toutefois possible, si la vitesse thermique est trop élevée ou si l'amplitude de l'onde est trop importante, que des effets du type  $\vec{E}(\vec{x}(t), t) \neq \vec{E}(M, t)$  apparaissent et demandent alors un traitement cinétique linéaire ou non [1, chap. 8].

## 4.2 Subtilité 2 : Les produits de deux grandeurs complexes

Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  peut être complexe (c'est le cas lorsque  $\omega < \omega_p$ ), mais il reste d'une forme bien particulière :  $\vec{k} = \underline{k}\vec{u}$  avec  $\underline{k} \in \mathbb{C}$  constant et  $\vec{u}$  vecteur réel. Il n'y a donc aucune difficulté. On a en particulier  $\vec{k} \perp \vec{E} \Leftrightarrow \underline{k} \perp \underline{\vec{E}}$ , ou encore  $\vec{k} // \vec{E} \Leftrightarrow \underline{k} // \underline{\vec{E}}$ .

Un autre point concerne le passage en notation complexe pour les quantités produits, telles que  $\vec{j} = -en\vec{v}$  ou  $\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Il n'y a pas de problème avec l'approche fluide où on reste en notation réelle pour démontrer les équations voulues, pour linéariser autour de la situation d'équilibre (en écrivant les grandeurs comme  $n = n_0 + n_1$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ , etc., voir §3.1), puis pour obtenir ainsi l'équation linéarisée en éliminant les termes d'ordre 2 (du type  $n_1\vec{v}_1$ ). On passe ensuite en régime sinusoïdal forcé et en complexes sans souci sur ces équations linéaires (voir [10]).

Avec la démonstration de la partie 1 on utilise d'emblée la notation complexe. Il faut alors être prudent sur les quantités comme  $\vec{j} = -en\vec{v}$  où en toute rigueur  $n$  est la densité électronique totale, somme de  $n_0$  densité constante non perturbée et  $\underline{n}_1 \propto e^{i\omega t}$  densité perturbée. On élimine en fait le produit  $\underline{n}_1\vec{v}$  car  $\vec{v}$  est déjà un ordre 1 ( $\vec{v} = \vec{0}$  dans la situation au repos) donc ce produit est d'ordre 2. Mais cela est sous-entendu.

## 4.3 Subtilité 3 : Un mot sur l'hypothèse non relativiste

L'hypothèse non relativiste permet d'écrire (entre autres choses) que  $\|\vec{v}_e \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$ . Mais quelle est la vitesse à prendre en compte lorsque l'on écrit  $v_e/c \ll 1$  ?

Dans le cadre du modèle fluide les choses sont simples car la vitesse  $\vec{v}_e$  qui apparaît ici est celle du fluide (la vitesse moyenne), indépendamment de la vitesse thermique qui disparaît lors du processus de moyenne. Dans le cas du modèle du PFD appliqué à un électron la vitesse est a priori la vitesse totale de l'électron, mais nous avons souligné que dans cette approche la vitesse thermique est négligeable devant la vitesse fluide, le plus contraignant est donc là encore d'avoir une vitesse fluide négligeable devant  $c$ .

Quoiqu'il en soit, la limite non relativiste doit être acquise à la fois pour la vitesse moyenne des électrons ( $v_{\text{més}} \ll c$ ), sans quoi il apparaît également dans l'équation fluide de conservation de la quantité de mouvement un facteur  $\Gamma = (1 - v_{\text{més}}^2/c^2)^{-1/2}$ , et pour la vitesse thermique ( $v_{\text{th,e}} \ll c$ ), sans quoi il apparaît aussi des termes supplémentaires dans l'équation fluide de conservation de la quantité de mouvement [8, eq. 3.62].

## 4.4 Discussion de la validité de l'approche "PFD appliqué à un électron"

Dans les livres de physique des plasmas on trouve presque toujours un chapitre consacré au modèle froid du plasma et à l'étude des ondes qui s'y propagent. Le modèle froid utilise les équations fluides linéarisées 18 et 19 ainsi que les équations de Maxwell linéarisées 21, puis effectue l'approximation  $v_{\text{th,e}}, v_{\text{th,i}} \ll v_\varphi$  avec  $v_{\text{th,e}}$  ou  $v_{\text{th,i}}$  la vitesse thermique électronique ou ionique et  $v_\varphi$  la vitesse de phase des ondes étudiées. Nous avons alors vu dans la sous-partie 3.2 que ceci permet de négliger le terme de pression, si bien que l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour le fluide d'électrons (et de même pour celui d'ions) devient :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -e(\vec{E}_1 + \vec{v}_{e1} \wedge \vec{B}_0). \quad (33)$$

ou encore si on est dans le cas d'un plasma non magnétisé :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -e\vec{E}_1. \quad (34)$$

Cette équation est ensuite le point de départ de l'étude des ondes se propageant dans un plasma magnétisé (présence de  $\vec{B}_0$ ) ou non avec le modèle du plasma froid, voir par exemple [7] chap. 4,

[1] chap. 6, [2] §5.3.1, et de nombreux autres ouvrages.

Pour ce qui nous intéresse, il est frappant de constater que les équations 34 ou 33 sont presque identiques à l'équation du mouvement obtenue en appliquant le PFD à un unique électron du plasma. Il est évident que ces équations fluides 34 ou 33 sont parfaitement justifiées et ne posent aucun problème d'interprétation. On pourrait donc dire que comme l'équation du mouvement pour un électron est la même, cette dernière se retrouve ainsi justifiée.

Il y a toutefois une différence notable entre l'équation fluide 34 et l'équation

$$m_e \frac{d\vec{v}_{\text{un électron}}}{dt} = -e\vec{E} \quad (35)$$

obtenue en appliquant le PFD à un électron : le modèle fluide est naturellement couplé aux équations de Maxwell, dans lesquelles le courant  $\vec{j} = n_0 e (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{e1})$  fait sans ambiguïté intervenir la même vitesse fluide  $\vec{v}_{e1}$  que celle de l'équation 34, assurant ainsi la rétroaction des charges sur les champs, alors que dans le cas de l'équation 35 il n'est pas évident de faire intervenir la vitesse individuelle d'un électron  $\vec{v}_{\text{un électron}}$  dans les équations de Maxwell. Dans ce dernier cas il se pose également la question du mélange entre quantités lagrangiennes et eulériennes souligné au §4.1. Disons le clairement : l'approche du PFD appliqué à un électron n'est pas la plus naturelle ni la plus courante... sauf en CPGE. Si on souhaite la justifier rigoureusement, deux options sont possibles :

- Il est clair que la densité volumique de courants  $\vec{j}$  des équations de Maxwell fait intervenir une vitesse moyenne de chaque espèce, prise sur un volume mésoscopique (on a discuté de la taille de ce volume dans le paragraphe 3.3). Il est donc possible de sommer l'équation 35 de chaque électron situé dans un volume mésoscopique fixe pour obtenir une relation entre la dérivée de la vitesse moyenne et le champ électrique moyen ressenti par les électrons de ce volume. On peut alors faire le lien avec les équations de Maxwell car la vitesse manipulée est bien la vitesse moyenne ou fluide.

Ceci reviendrait en fait à redémontrer les équations fluides, mais d'une façon alambiquée et qui présente nombre de difficultés : on obtient la moyenne des accélérations, ce qui n'est pas tout à fait la dérivée de la vitesse moyenne, il faudra justifier un passage d'une dérivée droite à une dérivée partielle temporelle sur un volume fixe, etc...

- Une autre option, plus raisonnable, est d'effectuer une hypothèse supplémentaire. On sait déjà que l'hypothèse  $v_{\text{th}} \ll v_\varphi$  a permis de négliger le terme de gradient de pression devant le terme de dérivée de la vitesse. Ce terme de pression étant absent de l'équation 35, on voit que la méthode menant à 35 nécessite aussi cette hypothèse. Nous ajoutons à ceci l'hypothèse  $v_{\text{th}} \ll v_{e1}$ , c'est-à-dire que la vitesse thermique (électronique ici) est négligeable devant la vitesse moyenne des électrons.

De façon générale, la vitesse de l'électron numéro  $p$  est  $\vec{v}_{\text{un électron}} = \vec{v}_{e1} + \vec{v}'_p$  avec  $\vec{v}_{e1} = \vec{v}_{\text{més}} = \vec{v}_{\text{fluide}} = \langle \vec{v} \rangle$  la vitesse moyenne, et  $\vec{v}'_p$  la partie fluctuante liée à l'agitation thermique. Ainsi dans la limite où  $v_{\text{th}} \ll v_{e1}$  on a  $\vec{v}_{\text{un électron}} = \vec{v}_{e1} = \vec{v}_{\text{més}}$  : à un instant donné en un point  $M$  tous les électrons ont la même vitesse, qui est celle du fluide.

Notons bien que cette dernière hypothèse  $v_{\text{th}} \ll v_{e1}$  est superflue pour démontrer les équations fluide du plasma froid, car la vitesse thermique disparaît automatiquement lors du processus de moyenne qui mène aux équations fluides pour ne survivre que dans le terme de pression [10, annexe 2]. On peut donc très bien obtenir les mêmes résultats avec le modèle du fluide froid qui ne nécessite pas d'ordering entre  $v_{\text{th}}$  et  $v_{e1}$ . Néanmoins, cette hypothèse rend la situation plus simple à conceptualiser et, plus important pour nous, permet de justifier rigoureusement l'approche "PFD à un électron".

Pour détailler cette justification, nous partons donc des deux hypothèses suivantes :

- On néglige toute influence de la température, dans le sens où on prend les limites

$$\begin{cases} v_{\text{th}} \ll v_\varphi \\ v_{\text{th}} \ll v_{\text{més}}. \end{cases} \quad (36)$$

La première limite implique que le terme en gradient de pression est négligeable si on utilise un modèle fluide, et donc que les effets thermiques n'ont pas d'impact par ce biais. La seconde limite implique que les électrons en un point  $M$  à l'instant  $t$  ont tous la même vitesse, c'est-à-dire  $\vec{v}_{\text{un électron}}(t) = \vec{v}_{\text{fluide}}$ .

— On néglige les collisions et autres interactions à courte portée, ce qui revient à dire que

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{mésos}} \quad \text{car} \quad \delta\vec{E} = \vec{0}. \quad (37)$$

Cette hypothèse est également nécessaire pour le modèle fluide puisqu'il ne présente pas de termes de viscosité ou de frottement. (Rappelons toutefois que négliger  $\delta\vec{E}$  ne revient pas à négliger toutes les interactions entre charges, revoir §2.2.)

Le tableau ci-dessous détaille alors la justification en utilisant les deux conditions ci-dessus. Dans ce tableau on note  $\vec{v}_{\text{un électron}}$  la vitesse de l'électron considéré et  $\vec{E}_{\rightarrow \text{un électron}}$  le champ électrique total appliqué à cet électron.

	Modèle fluide	Modèle "PFD appliqué à un électron"	Équivalence entre les deux
Équation de conservation de la quantité de mouvement	$mn \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P - ne(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$	$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$	
Termes négligés	$P = 0$ car température nulle, $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0$ car on linéarise l'équation, on a donc $m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$		
Équations de Maxwell	forme habituelle	forme habituelle	
Interprétation de $\vec{v}$	$\vec{v} = \vec{v}_{\text{mésos}}(M, t)$ grandeur mésoscopique lissée sur $d^3x$	$\vec{v} = \vec{v}_{\text{un électron}}(t)$ vitesse de l'électron considéré	$\vec{v}_{\text{un électron}} = \vec{v}_{\text{mésos}}$ dans la limite où $T = 0$ , car alors tous les électrons ont même vitesse
Interprétation de $\vec{E}$ (et de même pour $\vec{B}$ )	$\vec{E} = \vec{E}_{\text{mésos}}(M, t)$ (idem au dessus)	$\vec{E} = \vec{E}_{\rightarrow \text{un électron}}(M_{\text{élec}}, t) = \vec{E}_{\text{mésos}} + \delta\vec{E}$ le champ total auquel est soumis l'électron considéré	$\vec{E}_{\rightarrow \text{un électron}} = \vec{E}_{\text{mésos}}$ car $\delta\vec{E} = \vec{0}$ dans la limite où les collisions sont négligées
Interprétation de $n$	$n(M, t)$ nombre d'électrons par unité de volume	$n(M, t)$ nombre d'électrons par unité de volume	Égalité
Interprétation de $\vec{j}$	$\vec{j}(M, t) = -ne\vec{v}_{\text{mésos}}(M, t)$	$\vec{j}(M, t) = -ne\vec{v}_{\text{un électron}}(t)$ , l'électron étant en $M$	Égalité car $\vec{v}_{\text{un électron}} = \vec{v}_{\text{mésos}}$

On a bien au final la même chose, à la fois pour les équations considérées et pour les différentes grandeurs manipulées, ce qui permet de justifier l'approche "PFD appliqué à un électron".

## Conclusion

Les programmes de CPGE demandent d'utiliser l'exemple du plasma non collisionnel pour illustrer la propagation dispersive des ondes. Il s'agit là d'une initiative très pertinente, mais également risquée car ce domaine est peu familier des enseignants et possède une physique sous-jacente riche et complexe. Il faut donc prendre garde à fournir aux étudiants des démonstrations claires et, surtout, qui ne véhiculent pas d'idées fausses. Une méthode couramment utilisée en CPGE (et rarement ailleurs) est celle du PFD appliqué à un électron du plasma. Nous montrons dans la partie 4.4 qu'elle est justifiée sous les hypothèses  $\vec{E} \simeq \vec{E}_{\text{mésos}}$  (collisions coulombiennes

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$



négligées),  $v_{th} \ll v_\varphi$  et  $v_{th} \ll v_{més0}$ , cette toute dernière hypothèse s'ajoutant aux précédentes pour justifier la méthode.

Nous ne sommes pas contre cette méthode, à condition qu'elle soit correctement exposée. C'est pourquoi nous insistons sur quelques erreurs à ne pas commettre, et nous soulignons en particulier dans la partie 2 les pièges les plus couramment rencontrés : affirmer que  $\rho = 0$  car le plasma est neutre et affirmer que l'on néglige toute interaction entre les charges. La démonstration proposée dans la partie 1 évite ces erreurs, mais doit pour cela être légèrement plus longue que la version qui les commet.

Est-il trop tard pour corriger le tir ? La quasi totalité des sujets de concours qui abordent les ondes dans les plasmas demandent aux candidats de commettre explicitement les erreurs précédentes... si bien que l'étudiant qui a appris à mener la démonstration correctement s'en retrouvera potentiellement pénalisé. Nous avons conscience que la présence de ce point de physique des plasmas dans le programme n'est pas là pour l'étude des plasmas mais bien comme un exemple de milieu dispersif. Il nous semble néanmoins que demander des démonstrations manifestement erronées est contraire à l'exigence des classes préparatoires. Nous espérons que cet article aidera à aller dans l'autre sens.

## Remerciements

Merci à Jean-Marie Biansan pour la relecture de l'article et pour ses suggestions.

## Références

- [1] P. M. Bellan. *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, January 2006.
- [2] G. Belmont, R. Grappin, F. Mottez, F. Pantellini, and G. Pelletier. *Collisionless Plasmas in Astrophysics*. Wiley-VCH, 2014.
- [3] G. Bouyrie. Pression d'un fluide. *Bull. Un. Phys.*, 966 :1171–1207, 2014.
- [4] A. Brin and Merigoux R. La notion de pression en statique des fluides. *Bull. Un. Phys.*, 455 :226–238, 1960.
- [5] J.D. Callen. *Fundamentals of Plasma Physics*. 2006. URL <http://homepages.cae.wisc.edu/~callen/book.html>.
- [6] M. Devaud and J. Treiner. Théorie cinétique de la pesée d'un gaz. *Bull. Un. Phys.*, 928, November 2010. URL [http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/une\\_fiche.php?ID\\_fiche=20803](http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/une_fiche.php?ID_fiche=20803).
- [7] R. Fitzpatrick. *The Physics of Plasmas*. 2011. URL <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/plasma.html>.
- [8] M. Melzani. *Collisionless magnetic reconnection in relativistic plasmas with particle-in-cell simulations*. PhD thesis, Université de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon, 2014. URL <http://www.theses.fr/2014ENSL0946>.
- [9] M. Melzani. Une courte introduction à la physique des plasmas dilués. *Bull. Un. Phys.*, 992 :329–342, March 2017.
- [10] M. Melzani. Ondes dans un plasma dilué non magnétisé. *Bull. Un. Phys.*, 993 :425–441, April 2017.
- [11] D. R. Nicholson. *Introduction to Plasma Theory*. John Wiley & Sons, 1983.

- [12] L. Viennot. Le poids de l'air, le choc des molécules : quel rapport ? *Bull. Un. Phys.*, 922 : 263–268, March 2010.