

**Association de deux ressorts en série**

On considère deux ressorts mis bout à bout, chacun de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . On néglige leur masse. On note  $l'_0 = 2l_0$  la longueur à vide de l'association des deux ressorts, et  $l'$  l'allongement de l'ensemble.

- 1 - Montrer que les deux ressorts sont équivalents à un seul ressort, de longueur à vide  $l'_0 = 2l_0$  et de raideur  $k' = k/2$ .

On considère maintenant une corde d'escalade de longueur  $L_0$  au repos. On modélise son comportement par une loi de type ressort, qui indique que sa tension  $T = k(L - L_0)$  pour un allongement  $L > L_0$ .

- 2 - Proposer une expression pour la raideur  $k$  de la corde en fonction de sa longueur à vide  $L_0$ , et d'une constante de proportionnalité  $\alpha$  dont on précisera la dimension.

**Étude d'une chute en escalade**

On étudie maintenant un grimpeur qui effectue une chute.

Il est en chute libre sur une hauteur  $h$  pendant laquelle la corde n'est pas sous tension.

Puis la corde passe sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur  $\Delta l$ .

La vitesse du grimpeur devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale  $h + \Delta l$ .

Ensuite, l'élasticité de la corde fait remonter légèrement le grimpeur, etc.

- 3 - À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par le grimpeur.

A.N. pour une masse de 80 kg et une hauteur de chute  $h = 4$  m.

- 4 - Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal  $\Delta l$  de la corde. On pourra faire une approximation qui permet de simplifier le calcul.

- 5 - Donner enfin l'expression de la force maximale qui s'exerce sur le grimpeur. On introduira le facteur de chute  $f = h/L_0$ .

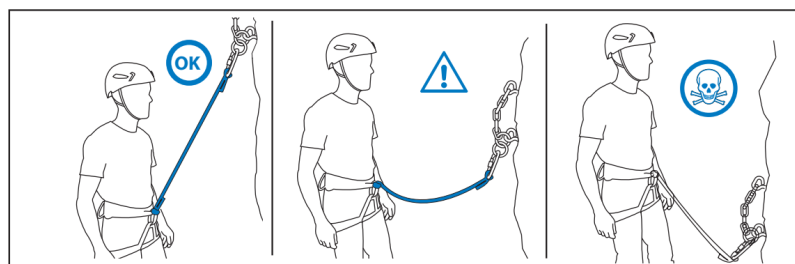
Les normes imposent que la force de choc ne dépasse pas 12 kN pour la chute d'un grimpeur de 80 kg avec un facteur de chute de 1.8 (au delà de 12 kN les dommages sur le corps humain sont trop importants).

En déduire la valeur de  $\alpha$  qui correspond à cette limite. Dans la suite on prendra  $\alpha = 4.5 \times 10^4$  SI.

Donner ensuite la valeur de  $F$  pour une chute de 4 m arrêtée par une corde de longueur 8 m. Donner également la valeur de l'allongement  $\Delta l$  de la corde. Est-on dans le cadre de l'approximation précédente ?

- 6 - Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

Commenter également l'extrait de notice d'une longe d'escalade ci-dessous, sachant qu'une corde d'escalade est prévue pour résister à quelques chutes de facteur 1.8 avec une masse de 80 kg.

**25.4 – Correction**

- 1 - Si on fait un schéma on se rend compte que pour un allongement  $\Delta l = l' - l'_0$  de l'ensemble, l'allongement de chaque ressort est de  $\Delta l/2$ .

La tension exercée à l'extrémité basse du second ressort est donc donnée par  $\vec{T} = -k \frac{\Delta l}{2} \vec{e}_z$ .

Mais c'est aussi de façon évidente la tension exercée par l'ensemble du dispositif.

On peut la réécrire  $\vec{T} = -\frac{k}{2} \Delta l \vec{e}_z = -\frac{k}{2} (l' - 2l_0) \vec{e}_z$ .

L'ensemble est donc équivalent à un ressort de longueur à vide  $l'_0 = 2l_0$  et de raideur  $k' = k/2$ .



La force de choc s'exerçant sur le grimpeur est alors donnée par

$$F = mg \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha f}{mg}} \right),$$

ce qui se réduit bien à la relation  $F = \sqrt{2mg\alpha f}$  si  $mg \ll 2\alpha f$ .

En inversant la relation précédente on a  $\alpha = \frac{F^2}{2mgf}$ , soit pour une limite de  $F = 12 \text{ kN}$  avec  $f = 1.8$  et

$m = 80 \text{ kg}$  :  $\alpha = 5.0 \times 10^4 \text{ N}$ . La valeur retenue pour la suite est légèrement inférieure, ce qui permet d'être en dessous de la valeur limite de  $12 \text{ kN}$ .

(on aurait trouvé  $\alpha = 4.6 \times 10^4 \text{ N}$  avec la formule complète)

Pour  $h = 4.0 \text{ m}$  et  $L_0 = 8.0 \text{ m}$  on a  $f = 0.5$ , et donc  $F = \sqrt{2mg\alpha f} = 6.0 \text{ kN}$ , ainsi que  $\Delta l = \sqrt{\frac{2mghL_0}{\alpha}} = 1.1 \text{ m}$ .

On a donc  $\Delta l/h \simeq 0.25$ , ce qui n'est pas très petit, mais peu importe car il y a de toute façon d'autres approximations qui ont été faites (par exemple modéliser la corde par une loi de type ressort, supposer que l'assureur reste immobile et que toute l'énergie est absorbée par la corde, etc.).

**6 -** La conclusion importante à tirer de cette expression est que la force de choc dépend du facteur de chute  $f = h/L_0$  (hauteur de chute divisée par la longueur de la corde qui se met sous tension lors de l'arrêt de la chute).

Ainsi, une chute d'un mètre sur une corde de  $50 \text{ cm}$  ( $f = 2$ ) est beaucoup plus dangereuse qu'une chute de  $4 \text{ m}$  sur une corde de  $8 \text{ m}$  ( $f = 0.5$ ).

Concernant l'extrait de la notice, le facteur de chute est de gauche à droite :  $0, 1$  et  $2$  (environ). Il y a donc danger de rupture du matériel dans le cas de gauche. Il ne faut jamais être au dessus du point d'ancrage.