Étude des systèmes linéaires
Chapitre 3

Correction – TD – Régime transitoire des systèmes du 2nd ordre

I Circuit RLC série : décharge

1 - Schéma obligatoire, avec interrupteur fermé, et flèches de tension sur les composants.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ u_L + u_R + u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_C = 0
\end{aligned}$$

avec par identification $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \frac{L}{R}\omega_0$ soit après remplacement : $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$

2 - On trouve $Q = 10$ et $\omega_0 = 10^5\,\mathrm{rad/s}$.

3 - $Q = 10 > 1/2$ donc le régime est pseudo-périodique.

La solution particulière est nulle ici, donc la solution est égale à la solution homogène :

$$\boxed{u_C(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t},}$$

et pour déterminer la pseudo-pulsation Ω et le facteur μ il faut trouver les racines de l'équation caractéristique. Celle-ci est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) < 0.$

Les racines sont donc

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}\\
&= -\frac{\omega_0}{2Q} + \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\\
r_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q} - \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.
\end{aligned}$$

On identifie avec $r_{1\text{ ou }2} = -\mu \pm \mathrm{i}\Omega$ pour obtenir :

$$\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

Ici $Q = 10$, donc $\Omega = \omega_0 \times 0{,}9987 \simeq \omega_0$.

4 - a/ Détermination des CI

⋆ Pour $u_c(0)$: on sait que la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.
Or pour $t < 0$ le condensateur est chargé à U_0, donc $u_C(0^-) = U_0$.
Donc $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$.

⋆ Pour $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0)$:
Pour $t < 0$ le courant est nul car le circuit est ouvert, donc $i(0^-) = 0$.
Donc par continuité du courant (car il passe à travers une bobine) : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.
Donc $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0$.

b/ Utilisation des CI

⋆ Utilisation CI1 : $u_C(0) = U_0$.
D'après la solution : $u_C(0) = A$.
Donc $\boxed{A = U_0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
Il faut dériver la solution :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\right)\\ &= -A\Omega\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + A\cos(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t} + B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = -A\mu + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = A\dfrac{\mu}{\Omega} = U_0\dfrac{\mu}{\Omega}.}$

⋆ Ici on a $\Omega \simeq \omega_0$, donc $B = U_0\dfrac{\omega_0/(2Q)}{\Omega} = \dfrac{U_0}{2Q}$.
Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = U_0\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{2Q}\sin(\Omega t)\right)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

5 - Tracer l'allure de la solution, et tracer également l'allure du portrait de phase $(u_c,\dot{u}_c)$.

II Circuit RLC série : soumis à un échelon de tension

1 - Schéma obligatoire, avec source de tension égale à E, et flèches de tension sur les composants. Même démarche que dans l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ u_L + u_R + u_C = E\\ &\Leftrightarrow\ L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = E\\ &\Leftrightarrow\ L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E\\ &\Leftrightarrow\ LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E\\ &\Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}E\\ &\Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_C = \omega_0^2E\end{aligned}$$

avec par identification $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$ donc $Q = \dfrac{L}{R}\omega_0$ soit après remplacement : $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.}$

2 - On trouve $Q = 10$ et $\omega_0 = 10^5\,\mathrm{rad/s}$.

3 - $\star$ Solution particulière : on la suppose constante, donc il reste $\omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$, donc $u_{C,P} = E$.

$\star$ Solution de l'équation homogène : identique à l'exercice précédent, on a

$$u_{C,H}(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t},$$

avec

$$\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

Ici $Q = 10$, donc $\Omega = \omega_0 \times 0{,}9987 \simeq \omega_0$.

$\star$ Solution totale :

$$\boxed{u_C(t) = E + (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

$\star$ Détermination des conditions initiales (pas vraiment demandé) : Pour $t < 0$ on a $u_C = 0$ (condensateur non chargé) et $i = 0$ (générateur éteint).

Donc $u_C(0^-) = 0$ et $i(0^-) = 0$.

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

Et par continuité de l'intensité traversant une bobine : $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0$.

$\star$ Utilisation CI1 : $u_C(0) = 0$.

D'après la solution : $u_C(0) = A + E$.

Donc $\boxed{A = -E.}$

$\star$ Utilisation CI2 : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Il faut dériver la solution, c'est la même chose que dans l'exercice précédent car E est une constante, donc on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = -A\mu + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = A\dfrac{\mu}{\Omega} = -E\dfrac{\mu}{\Omega}.}$

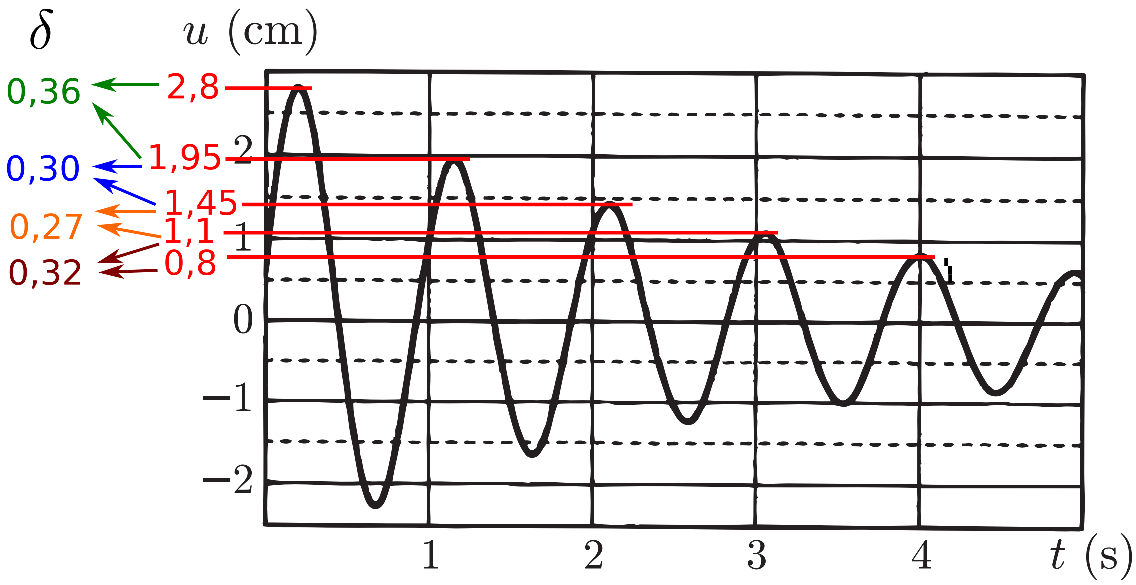
$\star$ Ici on a $\Omega \simeq \omega_0$, donc $B = -E\dfrac{\omega_0/(2Q)}{\Omega} = -\dfrac{E}{2Q}$.

Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = E - E\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{2Q}\sin(\Omega t)\right)\ \mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

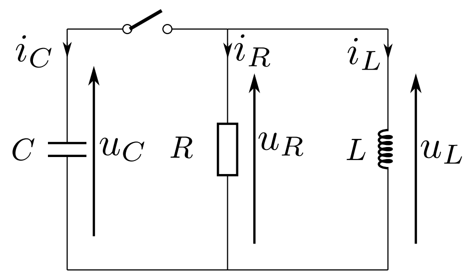
4 - Tracer l'allure de la solution, et tracer également l'allure du portrait de phase $(q,\dot{q})$.

III Système masse-ressort vertical



IV Circuit RLC parallèle

Schéma obligatoire avec convention récepteur pour tous les récepteurs :



1 - ⋆ **Instant initial** $(t = 0^+)$:

- Seules deux grandeurs sont continues : $u_C(t)$ et $i_L(t)$.
  Et on sait que $u_C(0^-) = U_0$ et $i_L(0^-) = 0$.
  On a donc $\boxed{u_C(0^+) = U_0}$ et $\boxed{i_L(0^+) = 0}$.
- Tout est en dérivation donc quel que soit t on a $u_R(t) = u_L(t) = u_C(t)$.
  En particulier : $\boxed{u_R(0^+) = u_L(0^+) = u_C(0^+) = U_0.}$
  Donc $\boxed{i_R(0^+) = \dfrac{u_R(0^+)}{R} = \dfrac{U_0}{R}.}$
- Loi des nœuds appliquée en particulier à 0^+ : $i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$,
  donc $\boxed{i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+) = -\dfrac{U_0}{R}.}$

2 - Suite d'étapes :

$$\begin{aligned}
& i_c + i_L + i_R = 0 \quad \text{(loi des nœuds)} \\
& C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + i_L + \frac{u_R}{R} = 0 \quad \text{(loi d'Ohm et loi condensateur)} \\
& C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + i_L + \frac{u_c}{R} = 0 \\
& C\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_c}{R} = 0 \quad \text{(on dérive tout par rapport au temps)} \\
& C\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u_L}{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_c}{R} = 0 \quad \text{(loi bobine)} \\
& C\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u_c}{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_c}{R} = 0 \\
& \frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{LC} = 0 \\
& \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c = 0}
\end{aligned}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.}$

(on remarque que Q à l'expression inverse de celle pour le RLC série !)

3 - Le régime est critique pour $Q = 1/2$, donc pour $R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2}$, donc pour $\boxed{R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = 250\,\Omega.}$

4 - Ici $Q = 1/2$: le discriminant est nul.

⋆ L'équation n'a pas de second membre, donc la solution particulière est nulle et la forme générale des solutions est

$$\boxed{u_C(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

Pour trouver μ on cherche la racine de l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, donc la racine est $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$. On a donc $\mu = \omega_0$.

⋆ Condition initiale 1 : $u_C(0^+) = U_0$.
D'après la solution $u_C(0) = B$, donc $B = U_0$.

⋆ Condition initiale 2 : $\dot{u}_C(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\frac{U_0}{RC}$.
D'après la solution $\dot{u}_C = A\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + (At + B)(-\omega_0)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$, donc $\dot{u}_C(0) = A - \omega_0 B$.
On a donc $A - \omega_0 B = -\frac{U_0}{RC}$, d'où $A = \omega_0 U_0 - \frac{U_0}{RC}$.

⋆ Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = U_0\left[\left(\omega_0 - \frac{1}{RC}\right)t + 1\right]\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$

Remarque : On a $\omega_0 RC = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = Q = \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{RC} = 2\omega_0$. Ainsi l'expression de $u_c(t)$ s'écrit aussi :

$$\boxed{u_C(t) = U_0\,(1 - \omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$

Ainsi, pour $t = 1/\omega_0$ la tension passe de positive à négative.
On peut aussi calculer la dérivée, et obtenir

$$\boxed{\dot{u}_C(t) = -\frac{U_0}{RC}\left(1 - \frac{\omega_0 t}{2}\right)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$

Ainsi, la fonction $u_C(t)$ décroit de $t = 0$ à $t = 2/\omega_0$ et croît ensuite vers son asymptote (valeur nulle en $+\infty$).