

Correction – Physique-chimie – DS 4

I Filtre ADSL

1 - Pour récupérer seulement les signaux téléphoniques il faut un filtre passe-bas.

Pour récupérer seulement les signaux informatiques il faut un filtre passe-haut.

On peut proposer une fréquence de coupure f_0 autour de 10 kHz.

2 - À basses fréquences, les bobines sont équivalentes à des fils. On a donc $s = 0$.

À hautes fréquences, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouverts. On montre alors que le courant parcourant les résistances est nul. Celles-ci ne jouent donc aucun rôle. On a donc $s = e$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

La sortie s doit donc correspondre au signal fourni à la box internet.

3 - a - Diviseur de tension :
$$\underline{s} = \underline{u} \times \frac{jL\omega}{R + jL\omega}.$$

b - Soit \underline{Z} l'impédance regroupant la résistance de droite et les deux bobines.

On a $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$, soit donc
$$\underline{Z} = \frac{jL\omega(R + jL\omega)}{R + 2jL\omega}.$$

On réalise alors un schéma équivalent, et on voit avec un diviseur de tension que

l'on a
$$\underline{u} = \underline{e} \times \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R}.$$

4 - a - Pour $x = 1$ on a $\underline{H} = j/3$. Donc $G_{dB} = 20 \log(1/3) = -20 \log(3)$, et $\varphi = \pi/2$.

b - ★ Hautes fréquences : $\underline{H} \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1$, $\underline{H} \sim 1$.

★ Basses fréquences : $\underline{H} \sim \frac{-x^2}{1} = -x^2$, $\underline{H} \sim -x^2$.

c - ★ Pour le gain :

On a $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$.

À hautes fréquences on a donc $G_{dB} \sim 20 \log(1) = 0$.

À basses fréquences $G_{dB} \sim 20 \log |-x^2| = 40 \log x$, soit une pente de +40 dB par décade.

★ Pour la phase :

$\varphi = \arg(\underline{H})$.

À hautes fréquences on a donc $\varphi \sim \arg(1) = 0$.

À basses fréquences $\varphi \sim \arg(-x^2) = \pm\pi$ car il s'agit d'un réel négatif. Comme elle vaut $\pi/2$ en $x = 1$, on voit par continuité que le bon choix est $\varphi \sim \pi$.

d - Voir allure d'un filtre passe-haut du deuxième ordre, sans résonance ici.

$$5 - \star \quad |H| = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}}$$

$$\star \quad \arg(H) = \arg(-x^2) - \arg(1 - x^2 + 3jx)$$

$$\text{Or } \arg(-x^2) = \pi.$$

$$\text{Et on a } \arg(1-x^2+3jx) = \arg\left(j \times \left[\frac{1-x^2}{j} + 3x\right]\right) = \arg(j) + \arg(-j(1-x^2) + 3x) = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{-(1-x^2)}{3x}$$

Donc finalement :

$$\arg(H) = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1-x^2}{3x}$$

Remarque : Si on n'utilise pas l'astuce de la factorisation par j, alors il faut séparer les cas :

$$\arg(H) = \pi - \arctan \frac{3x}{1-x^2} \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad \arg(H) = -\arctan \frac{3x}{1-x^2} \text{ si } x > 1,$$

ce qui revient au même si on utilise des formules comme $\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x)$ pour $x > 0$.

II Mesure du temps par horloge à balancier : étude du pendule

Mise en équation et résolution dans le cas des petites oscillations

6. \star Bilan des forces sur la masse :

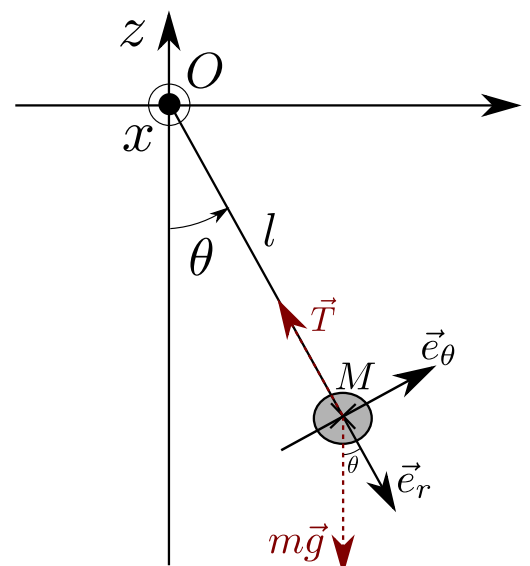
- Tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.

- Poids

$$\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta).$$

\star Pour avoir l'expression du vecteur accélération on part du vecteur position :

$$\vec{OM} = l\vec{e}_r, \quad \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$



7. ★ PFD à la masse dans le référentiel d'étude galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}, \text{ soit } ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) - T\vec{e}_r.$$

On projette sur \vec{e}_θ : $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$, d'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

8. Hypothèse $\theta \ll 1$, donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$. On pose $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Solution générale $\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$.

C.I. : $\dot{\theta}(0) = 0$ donc $B = 0$, puis $\theta(0) = \theta_0$ donc $A = \theta_0$.

Donc $\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t$.

9. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{l/g}$.

10. Pour $T_0 = 2\text{ s}$ on trouve $l = g \frac{T_0^2}{4\pi^2} = 0,99 \text{ m}$.

Influence des frottements

11. Même bilan que précédemment mais avec en plus la force $\vec{f} = -C\vec{v} = -Cl\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

La projection du PFD sur \vec{e}_θ donne donc :

$$ml\ddot{\theta} = -Cl\dot{\theta} - mg\sin\theta, \text{ d'où } \ddot{\theta} + \frac{C}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Avec l'approximation des petits angles on a bien :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

12. Forme canonique : $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

On a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{C}{m}$, d'où $Q = \omega_0 \frac{m}{C}$, soit $Q = \frac{m}{C} \sqrt{\frac{g}{l}}$.

13. Le nombre d'oscillations donne l'ordre de grandeur du facteur de qualité, soit donc ici $Q \simeq 100$.

14. ★ $Q > 1/2$ donc solution homogène du type $(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)e^{-\mu t}$. La solution particulière est nulle.

★ Pour obtenir Ω et μ on écrit l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, dont les racines sont :

$$r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Or $r_{\pm} = -\mu \pm j\Omega$, donc $\mu = -\frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

★ Enfin on utilise les CI pour obtenir A et B :

– CI1 : $\theta(0) = \theta_0$, donc $A = \theta_0$.

– CI2 : $\dot{\theta}(0) = 0$. Or $\dot{\theta} = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) (-\mu) e^{-\mu t} + (-A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \cos \Omega t) e^{-\mu t}$,
 et donc en $\dot{\theta}(0) = A(-\mu) + B\Omega$. Donc $B = \frac{A\mu}{\Omega} = \frac{\theta_0\mu}{\Omega}$.

On a donc : $\theta(t) = \theta_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\mu}{\Omega} \sin \Omega t \right) e^{-\mu t}$.

Expression de la période dans le cas des grandes oscillations

15. On multiplie par $\dot{\theta}$: $\dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2 \dot{\theta} \sin \theta = 0$, donc $\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \theta \right) = 0$,

donc $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \theta = \text{cst}$.

Or à $t = 0$ on a $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = \theta_0$, ce qui donne la constante : $\text{cst} = -\omega_0^2 \cos \theta_0$.

On a donc $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \theta = -\omega_0^2 \cos \theta_0$, soit donc $\dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}$.

16. $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}$, donc $d\theta = \pm dt \times \sqrt{2} \omega_0 \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}$.

17. L'idée est de dire que la période T est la somme des petits intervalles de temps dt .

On somme entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = 0$, ce qui donne en fait un quart de période. Durant cet intervalle θ décroît et donc $\dot{\theta} < 0$ (on garde le signe moins ci-dessus). On a :

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \int_{t=0}^{T/4} dt \\ &= \int_{\theta=\theta_0}^0 \frac{-d\theta}{\sqrt{2} \omega_0 \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \\ &= \int_0^{\theta_0} \frac{T_0}{\sqrt{2} 2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \end{aligned} \tag{1}$$

$$T = T_0 \times \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}, \quad \text{avec } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Expression approchée de la période dans le cas des oscillations pas trop grandes

18. Étape 1, DL : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \omega_0^2 \frac{\theta^3}{6} = 0$.

Étape 2 : ci-dessus on remplace θ par son expression $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$:

$$-\omega^2 \theta_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \sin^3 \omega t = 0.$$

Étape 3 : on utilise la formule trigonométrique en négligeant le terme $\sin 3\omega t$:

$$-\omega^2 \theta_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \frac{3}{4} \sin \omega t = 0.$$

Enfin, on isole ω :
$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)}.$$

19. On a $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)^{-1/2} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta_0^2}{8}\right).$

On a bien
$$\boxed{T = T_0 \times \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)}.$$

20. $\theta_0 = 30^\circ = 0,5 \text{ rad}$, on lit alors un écart de 2×10^{-4} soit 0,02%.

21. Avec la formule : $3600T = T_0 \times \left(3600 + 3600 \frac{\theta_0^2}{16}\right) = T_0 \times 3662 = 3662 \text{ s}$ soit une heure et 62 s.

Sur une journée, ceci donne un retard de $24 \times 60 \text{ s}$, soit environ 24 minutes, bien supérieur aux dix secondes données dans le graphique. Ceci montre que Huygens avait bien pris en compte la dépendance en θ_0 .

III La révolution de l'horloge à quartz _____

III.1 Étude d'un circuit à quartz

Étude du quartz

22. $\underline{i} = \frac{u_e}{\underline{Z}_q}$ par définition de l'impédance.

23. Calcul de l'impédance équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_q} &= jC_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega} = jC_0\omega + \frac{jC_1\omega}{1 + (jL_1\omega)(jC_1\omega)} \\ &= jC_0\omega + \frac{jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} = \frac{jC_0\omega(1 - L_1C_1\omega^2) + jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= \frac{j(C_0 + C_1)\omega - jC_0L_1C_1\omega^3}{1 - L_1C_1\omega^2} = j(C_0 + C_1)\omega \times \frac{1 - \frac{C_0L_1C_1}{C_0 + C_1}\omega^2}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= jC_{\text{éq}}\omega \frac{1 - \omega^2/\omega_2^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2}, \end{aligned}$$

avec $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} L_1}}$ et $C_{\text{éq}} = C_0 + C_1$.

24. On a $\underline{i} = \underline{u}_e \times 1/|\underline{Z}_q|$, donc on regarde si $1/|\underline{Z}_q|$ diverge.

On a $1/|\underline{Z}_q| \rightarrow \infty$ pour $\omega = \omega_1$, donc la fréquence de résonance est $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$.

25. Soit $\underline{Z}_{\text{éq}}$ l'impédance équivalente à r , C et L en série. On a :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{\underline{u}_e}{r + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + \frac{jL_1\omega}{r} + \frac{1}{jrC_1\omega}} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + j\left(\frac{L_1\omega}{r} - \frac{1}{rC_1\omega}\right)}$$

Il faut identifier avec la forme $\frac{\underline{u}_e/r}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}$. On a donc $\frac{Q}{\omega_1} = \frac{L_1}{r}$ et $Q\omega_1 = \frac{1}{rC_1}$.

La première donne $Q = \omega_1 \frac{L_1}{r}$, qu'on injecte dans la seconde : $\omega_1 \frac{L_1}{r} \times \omega_1 = \frac{1}{rC_1}$ soit

donc $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

Puis on trouve $Q = \omega_1 \frac{L_1}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$.

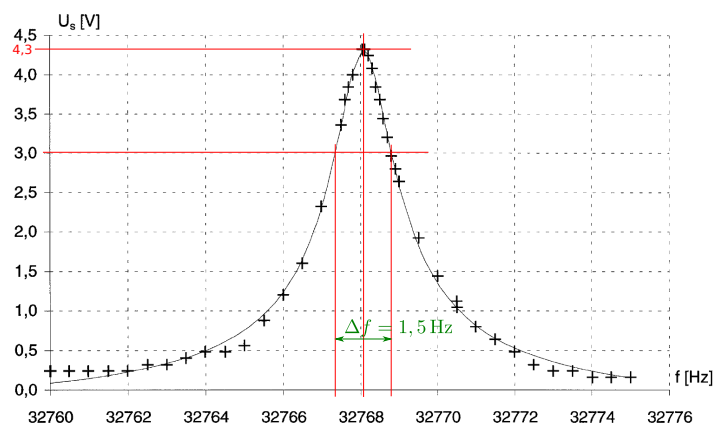
26. En utilisant l'expression précédente de \underline{i} , on voit qu'à la résonance (donc pour $\omega = \omega_1$) on a $\underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{r}$.

On a donc, en prenant le module, la relation suivante entre les amplitudes des signaux : $i_0 = \frac{u_0}{r}$.

Or le graphique montre l'amplitude U_s , qui vaut $U_s = Ri_0$.

Ainsi à la résonance on a $U_s = Ri_0 = \frac{Ru_0}{r}$.

On lit $U_s = 4,3$ V, donc $r = \frac{Ru_0}{U_s} = \frac{47 \text{ k}\Omega \times 0,2}{4,3} = 2,2 \text{ k}\Omega$.



27. Mesure de la largeur $\Delta f : 4,3 \text{ V}/\sqrt{2} = 3 \text{ V}$, on lit $\Delta f = 1,5 \text{ Hz}$.

$$\text{D'où } Q = \frac{32768}{1,5} = 22\,000 \simeq 20\,000.$$

28. On part de $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ et on isole $L_1 = \frac{rQ}{\omega_1}$ et $C_1 = \frac{1}{\omega_1 r Q}$.

29. $L_1 = 200 \text{ H}$.

Cette valeur d'inductance n'est pas une valeur usuelle pour des composants électroniques. C'est normal, car il ne s'agit pas de composants réels, mais d'outils servant à modéliser la réponse mécanique du quartz.

Utilisation dans une montre

30. Il y a environ $Q = 20\,000$ oscillations libres, chacune de durée $1/f_1$, donc une durée totale $\sim Q/f_1 \simeq 1 \text{ s}$.

Ce n'est pas raisonnable pour fabriquer une horloge, il faut entretenir les oscillations.

31. La montre doit délivrer un signal de fréquence 1 Hz , qui est obtenu en divisant par deux plusieurs fois de suite le signal à $32\,768 \text{ Hz}$. (Une division par deux est effectuée facilement à l'aide d'un circuit logique.)

Précision

32. Pour une seconde, la variation est de 10^{-6} s . Sur une journée, soit 86400 s , elle sera donc de 86 ms .

33. C'est bien supérieur à la précision atteinte par les horloges à quartz indiquées dans la figure.

Un moyen simple de contrôle est de placer le quartz dans une enceinte contrôlée en température.

IV Énergie en mécanique

34. Prenons un axe z vers le haut, avec $z = 0$ au départ. L'énergie mécanique est $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$, conservée car toutes les forces (le poids ici) sont conservatives.

Initialement $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$, et pour l'altitude maximale on a $v = 0$ et $z = z_{\max}$, d'où $E_m = mgz_{\max}$.

Par conservation de l'énergie mécanique on a donc $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgz_{\max}$, d'où

$$z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

35. Il faut faire un bilan d'énergie mécanique entre l'instant A "course d'élan" et l'instant C "sommet du saut".

Il y a deux énergies potentielles : celle de pesanteur, $E_{p,\text{pes}} = mgz$ avec z un axe vers le haut, et $E_{p,\text{élast}}$ l'énergie potentielle élastique de la perche, qui est nulle dans les étapes A et C car la perche n'est pas contractée ou pliée.

On a ainsi $E_{m,A} = E_{c,\text{max}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$ avec v_{max} la vitesse de course de l'athlète.

Et $E_{m,C} = mgh$ avec h la hauteur du saut (pas d'énergie cinétique car sauteur au sommet de la trajectoire).

On néglige tout frottement, le mouvement est donc conservatif et on a $E_{m,C} = E_{m,A}$, d'où $\frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = mgh$, d'où

$$h = \frac{v_{\text{max}}^2}{2g} = 5,1 \text{ m.}$$

On trouve ainsi une hauteur légèrement inférieure à la hauteur du record de Renaud Lavillenie. La raison est que notre raisonnement s'applique pour un point matériel, ou en fait pour le centre de masse du sauteur. Or le centre de masse est déjà situé à une certaine hauteur par rapport au niveau du sol, d'où un résultat légèrement plus élevé. Il faut également ajouter que le sauteur pousse sur ses bras lors du mouvement ascendant : il produit ainsi un travail qui vient augmenter son énergie totale.

Enfin, notre raisonnement montre que la hauteur maximale ne dépend pas de la perche utilisée, et en particulier pas de sa hauteur. La perche sert "seulement" à convertir l'énergie cinétique du sauteur en mouvement ascendant, puis donc en énergie potentielle de pesanteur.

Un reportage avec explications physiques : <https://www.youtube.com/watch?v=GqAOSM6QW2c>