Devoir Surveillé

Correction – Physique-chimie – DS 4

I Suspension de voiture

Première partie : suspension sans amortissement

1 - Système {véhicule}. Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$,
- action du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$.

Le véhicule ne touche pas le sol, il n'y a donc pas de force de réaction du sol.

2 - À l'équilibre la somme des forces est nulle, donc $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, d'où $-mg - k(z_e - l_0) = 0$, d'où $\boxed{z_e = l_0 - \dfrac{mg}{k}.}$

3 - Référentiel d'étude supposé galiléen, PFD appliqué au système {véhicule} :

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P}$. Or ici $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$. Donc on a

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z.$$

On projette sur $\vec{e}_z$, on réarrange :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \underbrace{-g + \frac{kl_0}{m}}_{z_e \times k/m}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}z_e.}$$

4 - Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique : on pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ pour avoir $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$.

La solution de l'équation homogène est $z_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Celle de l'équation particulière est $z_P = z_e$.

On a donc $\boxed{z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_e.}$

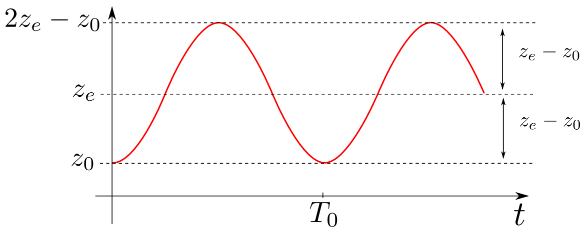
On a $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\,\text{rad/s}}$ et $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}63\,\text{s}.}$

5 - CI1 : $z(0) = z_0$. Or $z(0) = A + z_e$, donc $A = z_0 - z_e < 0$.

CI2 : $\dot{z}(0) = 0$. Or $\dot{z}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ et donc $\dot{z}(0) = B\omega_0$. Conclusion : $B = 0$.

On a donc $\boxed{z(t) = (z_0 - z_e)\cos\omega_0 t + z_e.}$

6 - Il s'agit de l'opposé d'un cosinus (car $z_0 - z_e < 0$), centré autour de z_e. La valeur minimale est à $t = 0$, avec $z(0) = z_0$.



Deuxième partie : suspension avec amortissement

7 - $F = hv$ donc l'unité de h est $[h] = \dfrac{[F]}{[v]} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

Or par exemple $F = ma$ donc $[F] = \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$, donc $[h] = \dfrac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$, soit donc $\boxed{[h] = \mathrm{kg \cdot s^{-1}}.}$

8 - Système {véhicule}. Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$,
- action du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$,
- amortisseur : $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{e}_z$.

À l'équilibre, $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$. Or comme $\vec{f} = \vec{0}$ à l'équilibre, on retrouve la même chose que dans la partie précédente, c'est-à-dire une côte à l'équilibre $z = z_e = l_0 - mg/k$.

9 - Référentiel d'étude supposé galiléen, PFD appliqué au système {véhicule} :

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{f}$. Or ici $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$. Donc on a

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z - h\dot{z}\vec{e}_z.$$

On projette sur $\vec{e}_z$, on réarrange :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \underbrace{-g + \frac{kl_0}{m}}_{z_e \times k/m}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}z_e.}$$

10 - Il s'agit d'une équation du second ordre. On calcule le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = \frac{h^2 - 4km}{m^2}.$$

Ainsi on a régime apériodique si $\Delta > 0$, si $h^2 > 4km$.

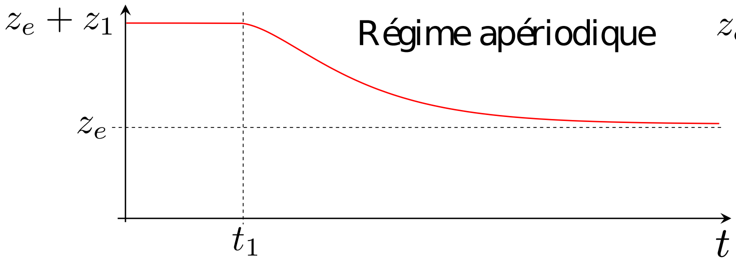
Régime critique pour $\Delta = 0$, donc pour $h^2 = 4km$.

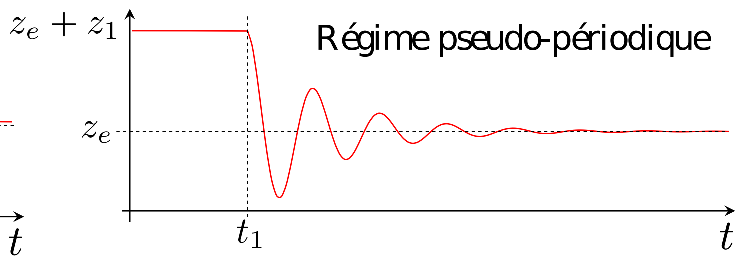
Régime pseudo-périodique si $\Delta < 0$, si $h^2 < 4km$.

11 - 1 - L'amortissement est d'abord en régime critique, donc $h^2 = 4km$. Ensuite le véhicule est chargé, donc m augmente, donc $4km$ devient supérieur à h^2 et on entre en régime pseudo-périodique.

2 - Il n'est pas souhaitable d'être en régime pseudo-périodique, car alors il y a de nombreuses oscillations. Il faut donc choisir h pour avoir $h^2 > 4km$ avec m la masse maximale du véhicule chargé.

12 - Il s'agit d'étudier la réponse à un échelon, c'est-à-dire de spécifier la nature du régime transitoire de retour à l'équilibre. On a dans les deux cas une hauteur z_e par rapport à la route pour $t < t_1$ et aussi pour $t \gg t_1$.





Ceci correspond par exemple à la descente d'un trottoir, et le cas pseudo-périodique n'est pas souhaitable pour une voiture !

Troisième partie : régime forcé

13 - $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z - z_s - l_0)\vec{e}_z$, car la longueur du ressort est maintenant $l = z - z_s$.

14 - Même démarche que précédemment, on aboutit à :

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z - z_s - l_0)\vec{e}_z - h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{e}_z.$$

On projette sur $\vec{e}_z$ et on réarrange :

$$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m}(z - z_s - l_0) - \frac{h}{m}(\dot{z} - \dot{z}_s)$$

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{kl_0}{m} - g + \frac{h}{m}\dot{z}_s + \frac{k}{m}z_s$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e + \frac{h}{m}\dot{z}_s(t) + \frac{k}{m}z_s(t).}$$

15 - On pose $z'(t) = z(t) - z_e$. On a donc $z(t) = z'(t) + z_e$, et en dérivant $\dot{z} = \dot{z}'$ et $\ddot{z} = \ddot{z}'$. On remplace donc dans l'équation ci-dessus :

$$\ddot{z}' + \frac{h}{m}\dot{z}' + \frac{k}{m}(z' + z_e) = \frac{k}{m}z_e + \frac{h}{m}\dot{z}_s(t) + \frac{k}{m}z_s(t),$$

d'où après simplification du terme en kz_e/m :

$$\boxed{m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = h\dot{z}_s(t) + kz_s(t), \quad \text{et on pose} \quad Y(t) = h\dot{z}_s(t) + kz_s(t).}$$

16 - ⋆On passe l'équation précédente en régime complexe, donc :

$$m(\mathrm{j}\omega^2)\underline{z}' + h\mathrm{j}\omega\underline{z}' + k\underline{z}' = h\mathrm{j}\omega\underline{z}_s + k\underline{z}_s.$$

On isole ensuite le rapport $\underline{z}'/\underline{z}_s$, donc :

$$(-m\omega^2 + h\mathrm{j}\omega + k)\underline{z}' = (h\mathrm{j}\omega + k)\underline{z}_s, \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline{z}'}{\underline{z}_s} = \frac{h\mathrm{j}\omega + k}{-m\omega^2 + h\mathrm{j}\omega + k}.$$

Après division par m :

$$\frac{\underline{z}'}{\underline{z}_s} = \frac{k/m + \mathrm{j}\omega\, h/m}{k/m - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\, h/m}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\underline{z}'}{\underline{z}_s} = \frac{\omega_0^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}.}$$

⋆Il faut ensuite prendre le module de l'expression précédente :

$$\boxed{H = \left|\frac{\underline{z}'}{\underline{z}_s}\right| = \frac{\sqrt{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}.}$$

17 - 1 - Pour $\omega \to 0$, on a $H = 1$. Ainsi la masse m suit exactement les mouvements du sol, l'amortissement ne joue aucun rôle.

2 - Pour $\omega \to +\infty$, on a $H = 0$. Ainsi la masse m n'oscille plus. L'amortissement joue donc le rôle de filtre passe-bas, en coupant les hautes fréquences.

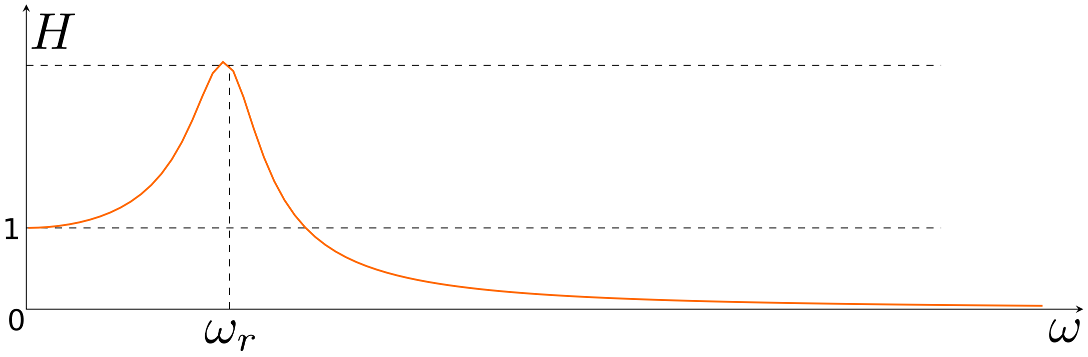
3 - Le dénominateur est minimal lorsque la fonction $f(x) = (x^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2 x^2$ est minimale.

Or $f'(x) = 2 \times 2x(x^2 - \omega_0^2) + 8\lambda^2 x$, donc $f'(x) = 0$ est équivalent à $x = 0$ ou $4(x^2 - \omega_0^2) + 8\lambda^2 = 0$.

On exclut le cas $x = 0$, donc il reste $4x^2 = 4\omega_0^2 - 8\lambda^2$, soit $x^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$, ce qui est positif par hypothèse, donc $\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

Lorsque $\omega = \omega_r$ le système est à la résonance. Il oscille alors avec une amplitude maximale, ce qui n'est pas bon pour la voiture !

18 - Allure :



II Filtre ADSL

19 - Pour récupérer seulement les signaux téléphoniques il faut un filtre passe-bas.

Pour récupérer seulement les signaux informatiques il faut un filtre passe-haut.

On peut proposer une fréquence de coupure f_0 autour de 10 kHz.

20 - À basses fréquences, les bobines sont équivalentes à des fils. On a donc $s = 0$.

À hautes fréquences, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouvert. On montre alors que le courant parcourant les résistances est nul. Celles-ci ne jouent donc aucun rôle. On a donc $s = e$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

La sortie s doit donc correspondre au signal fourni à la box internet.

21 - a - Diviseur de tension : $\boxed{\underline{s} = \underline{u} \times \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega}.}$

b - Soit $\underline{Z}$ l'impédance regroupant la résistance de droite et les deux bobines.

On a $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \dfrac{1}{R + \mathrm{j}L\omega}$, soit donc $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{\mathrm{j}L\omega(R + \mathrm{j}L\omega)}{R + 2\mathrm{j}L\omega}.}$

On réalise alors un schéma équivalent, et on voit avec un diviseur de tension que l'on a $\boxed{\underline{u} = \underline{e} \times \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R}.}$

22 - a - ⋆ Hautes fréquences : $\underline{H} \sim \dfrac{-x^2}{-x^2} = 1$, $\boxed{\underline{H} \sim 1.}$

⋆ Basses fréquences : $\underline{H} \sim \dfrac{-x^2}{1} = -x^2$, $\boxed{\underline{H} \sim -x^2.}$

b - ⋆ Pour le gain :

On a $G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$.

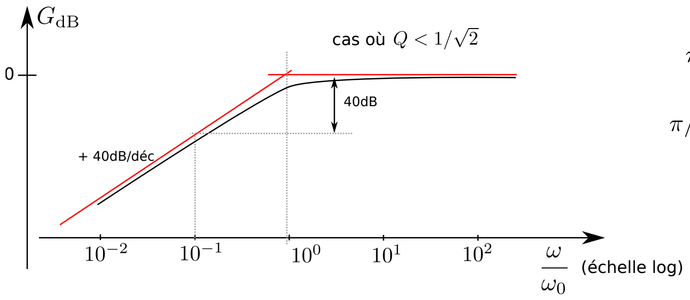
– À hautes fréquences on a donc $G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log(1) = 0$.
– À basses fréquences $G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log |-x^2| = 40 \log x$, soit une pente de $+40$ dB par décade.

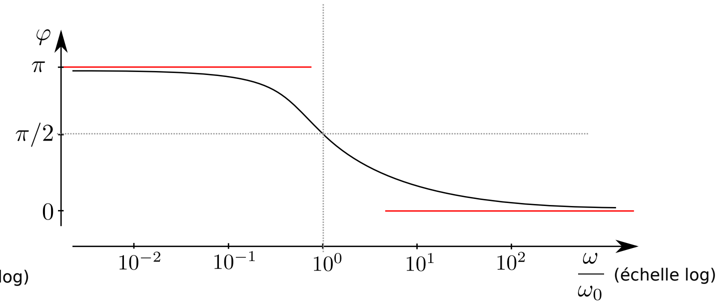
⋆ Pour la phase :

$\varphi = \arg(\underline{H})$.

– À hautes fréquences on a donc $\varphi \sim \arg(1) = 0$.
– À basses fréquences $\varphi \sim \arg(-x^2) = \pm\pi$ car il s'agit d'un réel négatif.
Or $\underline{H}(x = 1) = \mathrm{j}/3$ dont l'argument vaut $\pi/2$.
Ainsi par continuité, c'est $+\pi$ qu'il faut choisir à basse fréquence.

c - Allure (sans résonance ici) :





23 - $\star$ $\boxed{|\underline{H}| = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2+9x^2}}.}$

$\star$ $\arg(\underline{H}) = \arg(-x^2) - \arg(1-x^2+3\mathrm{j}x)$.

Or $\arg(-x^2) = \pi$.

Et $\arg(1-x^2+3\mathrm{j}x) = \arg(\mathrm{j}[-\mathrm{j}(1-x^2)+3x]) = \arg(\mathrm{j}) + \arg(3x - \mathrm{j}(1-x^2)) = \pi/2 + \arctan\dfrac{-(1-x^2)}{3x}$.

Donc $\arg(\underline{H}) = \pi - \pi/2 - \arctan\dfrac{-(1-x^2)}{3x}$, soit donc $\boxed{\arg(\underline{H}) = \dfrac{\pi}{2} + \arctan\dfrac{1-x^2}{3x}.}$

III Réduction active de bruit

24 - Il faut que le HP émettent à l'instant $t_2 = t_1 + d/c - l/c$. $\boxed{t_2 - t_1 = 2{,}6\,\text{ms}.}$

25 - L'onde émise doit elle aussi être de fréquence f.

26 - En M : $\boxed{s_i(d{,}t) = s_0 \cos(\omega t - kd + \varphi_i).}$

27 - $\boxed{s_{hp}(y{,}t) = s_0 \cos(\omega t - ky + \varphi_{hp}).}$

28 - En M : $\boxed{s_{hp}(l{,}t) = s_0 \cos(\omega t - kl + \varphi_{hp}).}$

29 - Le déphasage doit être de π (à 2π près).

30 - Ce déphasage vaut $-kl+\varphi_{hp}-(-kd+\varphi_i) = \pi$, soit donc $\boxed{\Delta\varphi = \varphi_{hp} - \varphi_i = \pi + k(l-d).}$

Or $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi f}{c}$, donc $\boxed{\Delta\varphi = \pi + \dfrac{2\pi f}{c}(l-d).}$

IV Mesure de l'épaisseur d'une lame à l'aide du dispositif des trous d'Young

31 - Cf correction de l'exercice de cours. On trouve $\boxed{\delta(M) = -\frac{ax}{D}}$

32 - Formule de Fresnel : $I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\right)\right)$.

Donc ici : $\boxed{I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right)}$.

33 - L'interfrange est $\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}.}$

34 - $\delta(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ donc la frange centrale est en $x = 0$.

35 - Non, on a encore $(S_1M) - (S_2M = -\frac{ax}{D}$.

36 - On a $(SS_1) = d - e + ne$ et $SS_2 = d$, donc $(SS_1) - (SS_2) = -e + ne = (n-1)e$.

37 - Donc cette fois, $\delta(M) = (n-1)e - \frac{ax}{D}$.

La frange centrale est en x tel que $\delta(M) = 0$, donc en $\boxed{x = \frac{D(n-1)e}{a}.}$

En terme de nombre d'interfranges, elle s'est déplacée de $\frac{x}{i} = \frac{(n-1)e}{\lambda}$.

38 - Enfin, on a $10 = \frac{x}{i} = \frac{(n-1)e}{\lambda}$, donc $\boxed{e = 10 \times \lambda/(n-1) = 12{,}5\,\mu\text{m}.}$

Remarque :avec ce dispositif on ne pourrait en fait pas voir de combien se déplace la frange centrale, car tout se déplace d'un bloc. Il faudrait travailler en lumière blanche pour repérer où est la frange centrale, puis revenir en lumière monochromatique pour faire la mesure.