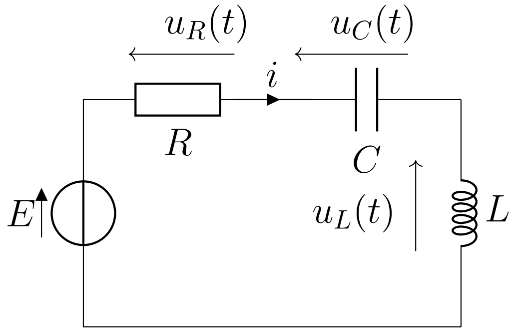
Correction – Physique-chimie – DS 3

I Production d'une tension sinusoïdale

On commence par refaire le schéma en indiquant les flèches de tension et de courant.



1 - À $t = 0^-$ on a $i(0^-) = 0$ (car l'interrupteur est ouvert), $u_c(0^-) = 0$ (car le condensateur est déchargé).

Or le courant traversant une bobine est nécessairement continu, donc $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$, et idem pour la tension aux bornes d'un condensateur : $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0.}$

Aux bornes de la résistance on a $\boxed{u_R(0^+) = Ri(0^+) = 0.}$

Enfin, la loi des mailles indique que pour tout $t > 0$ on a $u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = E$, et ceci est donc aussi valable à $t = 0^+$, ce qui donne alors $0 + 0 + u_L(0^+) = E$, soit $\boxed{u_L(0^+) = E.}$

2 - ⋆ Loi des mailles : $E = Ri + u_C + u_L$, que l'on dérive pour pouvoir utiliser $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i/C$.

On a alors $0 = R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$.

On remplace $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ à l'aide de la relation $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: $0 = \dfrac{R}{L}u_L + \dfrac{i}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$.

On dérive encore pour pouvoir encore remplacer $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ par u_L/L : $0 = \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_L}{LC} + \dfrac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2}$. Ce qui se réarrange en :

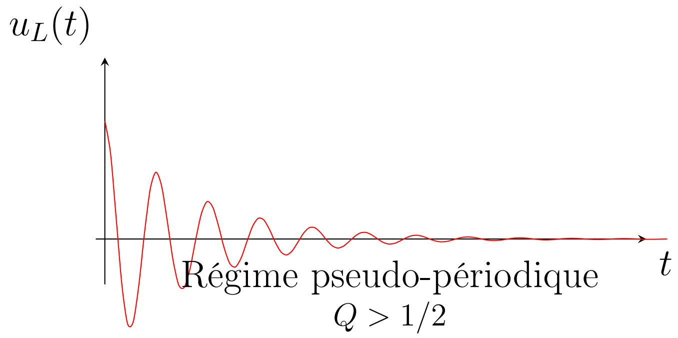
$$\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{u_L}{LC} = 0. \tag{1}$$

⋆ On identifie donc $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$, et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$, d'où $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.}$

3 - Il y a production d'oscillations seulement si le régime est pseudo-périodique, donc si $Q > 1/2$, soit donc si $\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.}$

A.N. : $\boxed{R < 2.4\,\mathrm{k}\Omega.}$

4 -



Le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations est le facteur de qualité Q. On a environ Q oscillations.

5 - On a la relation $u_L + u_C + u_R = E$, que l'on peut dériver : $\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = 0$.

On utilise ensuite $\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{R}{L}u_L$, $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}i$, d'où en fait :

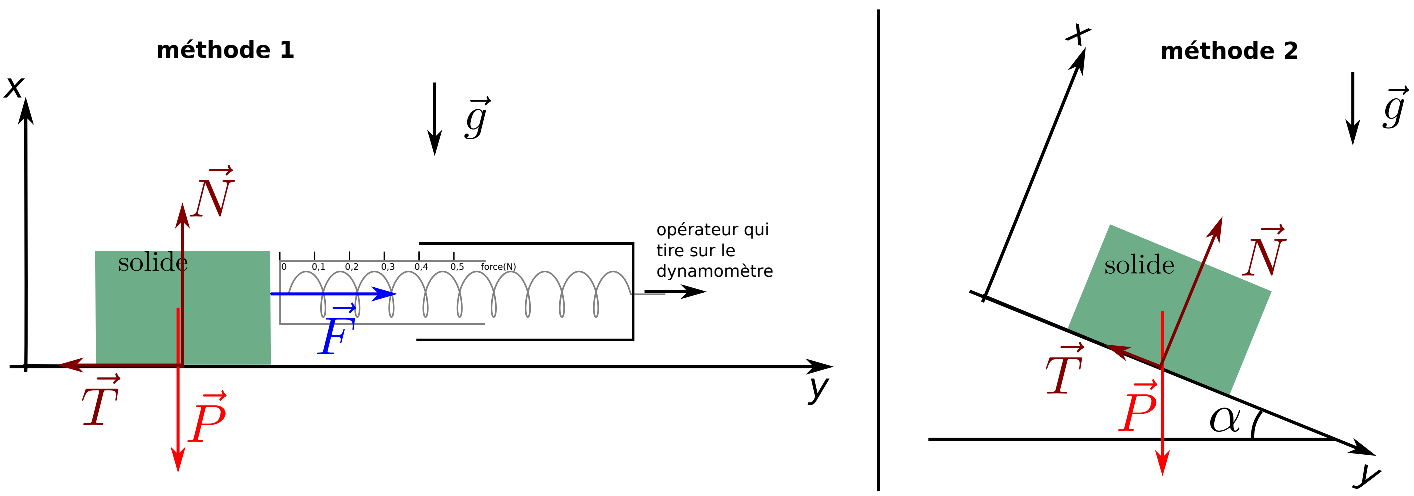
$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i(t) + \frac{R}{L}u_L = 0.$$

Ceci est valable pour tout t, donc en particulier à la limite où $t \to 0^+$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{1}{C}i(0^+) - \frac{R}{L}u_L(0^+).$$

Or $i(0^+) = 0$, et $u_L(0^+) = E$, donc on obtient $\boxed{\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{RE}{L}.}$

II Frottements de Coulomb



Méthode 1 :

6 - Bilan des forces sur l'objet de masse m immobile (on s'aide du schéma) :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_x$.
- Réaction normale du support $\vec{N} = N\vec{e}_x$.
- Réaction tangentielle du support : $\vec{T} = -T\vec{e}_y$.
- Force du dynamomètre : $\vec{F} = F\vec{e}_y$.

Le solide étant immobile, on a $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$, soit donc

$$-mg\vec{e}_x + N\vec{e}_x - T\vec{e}_y + F\vec{e}_y = \vec{0}.$$

On projette sur $\vec{e}_x$ et sur $\vec{e}_y$ pour obtenir $\boxed{N = mg}$ et $\boxed{T = F.}$

7 - L'objet reste immobile tant que $\boxed{\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|.}$

À l'instant de la mise en mouvement, on a l'égalité $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

Donc on a $F = fmg$, d'où $\boxed{f = \dfrac{F}{mg}.}$

8 - A.N. : $\boxed{f = \dfrac{0{,}4}{0{,}200 \times 10} = 0{,}2.}$

Méthode 2 :

9 - Bilan des forces sur l'objet de masse m immobile (on s'aide du schéma) :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$.
- Réaction normale du support $\vec{N} = N\vec{e}_x$.
- Réaction tangentielle du support : $\vec{T} = T\vec{e}_y$.

10 - Le solide étant immobile, on a $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$, soit donc

$$mg(-\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) + N\vec{e}_x + T\vec{e}_y = \vec{0}.$$

On projette sur $\vec{e}_x$ et sur $\vec{e}_y$ pour obtenir $\boxed{N = mg\cos\alpha}$ et $\boxed{T = -mg\sin\alpha.}$

11 - L'objet reste immobile tant que $\boxed{\|\vec{T}\| \leq f\|N\|.}$

À l'instant de la mise en mouvement, on a l'égalité $\|\vec{T}\| = f\|N\|$.

Donc on a $mg\sin\alpha = fmg\cos\alpha$, d'où $\boxed{f = \tan\alpha.}$

12 - A.N. : $\boxed{f = \tan(20^{\mathrm{o}}) = 0{,}36.}$

III Viscosimètre oscillant

Position d'équilibre

13 - Poussée d'Archimède : $\boxed{\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g}.}$

14 - $\vec{P} + \vec{\Pi} = m\vec{g} - \rho_f V \vec{g} = m\vec{g}\left(1 - \dfrac{\rho_f V}{m}\right).$

Or $m = \rho_0 V$, donc $\boxed{\vec{P} + \vec{\Pi} = m\,\vec{g}_0 \text{ avec } \vec{g}_0 = \vec{g}\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_0}\right).}$

15 - Force de rappel du ressort : $\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z - l_0)\vec{e}_z.}$

16 - Bilan des forces sur la bille : poids, force de rappel du ressort, force de frottement. Cette dernière est nulle à l'équilibre (car $\vec{v} = \vec{0}$).

À l'équilibre la somme est nulle : $mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z = \vec{0}$, d'où $z - l_0 = \dfrac{mg}{k}$ d'où $\boxed{z_{\text{éq}} = l_0 + \dfrac{mg}{k}.}$

Équation du mouvement et changement de variable

17 - PFD sur la bille : $m\,\ddot{z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z - 6\pi R\eta\dot{z}\vec{e}_z$

(on a utilisé $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ dans l'expression de $\vec{f}$)

En projetant et réarrangeant : $\boxed{\ddot{z} + \dfrac{6\pi R\eta}{m}\,\dot{z} + \dfrac{k}{m}\,z = g + \dfrac{kl_0}{m}.}$

18 - On a $z(t) = u(t) + z_{\text{éq}}$, donc en dérivant : $\dot{z} = \dot{u}$, et $\ddot{z} = \ddot{u}$. On remplace dans l'équation précédente :

$$\ddot{u} + \frac{6\pi R\eta}{m}\,\dot{u} + \frac{k}{m}\,(u + z_{\text{éq}}) = g + \frac{kl_0}{m}.$$

Or $z_{\text{éq}} = l_0 + \dfrac{mg}{k}$, il y a donc des simplifications qui mènent à :

$$\ddot{u} + \frac{6\pi R\eta}{m}\,\dot{u} + \frac{k}{m}\,u = 0.$$

On identifie facilement pour ω_0 : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}.}$

Et pour Q on a : $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{6\pi R\eta}{m}$ donc $Q = \omega_0\dfrac{m}{6\pi R\eta} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{m}{6\pi R\eta}$, d'où $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{km}}{6\pi R\eta}.}$

Dans l'air

19 - On a une équation du type oscillateur harmonique, sans second membre donc

$$\boxed{u(t) = u_{\text{homogène}} + \underbrace{u_{\text{part}}}_{\text{nulle ici}} = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad \text{période } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.}$$

20 - On mesure une période $\boxed{T_0 = 0{,}5\,\text{s}.}$

Dans un liquide

21 - Oscillations donc régime pseudo-périodique, donc $Q > 1/2$.

22 - Forme générale :

$$u(t) = u_{\text{homogène}} + \underbrace{u_{\text{part}}}_{\text{nulle ici}} = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\mathrm{e}^{-\mu t}.$$

On obtient les expressions de Ω et de μ en écrivant les racines du polynome caractéristique comme $r_\pm = -\mu \pm \mathrm{i}\Omega$.

Ce polynome est $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2$, de discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$. Donc les racines s'écrivent

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

$$\text{D'où } \boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

23 - $\boxed{T = 0{,}6\,\text{s}}$ (on repère les annulations : il y a 0,3 s entre les deux 1re et ceci correspond à $T/2$ – on ne peut pas faire avec les max ou les min).

24 - $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)} \;\Rightarrow\; \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{4Q^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4Q^2} = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{T_0^2}{T^2} \;\Rightarrow\; 4Q^2 = \frac{1}{1 - \frac{T_0^2}{T^2}} \;\Rightarrow\; \boxed{Q = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{T_0^2}{T^2}}}.}$

25 - On mesure T_0 pour les oscillations dans l'air : $T_0 = 0{,}5\,\text{s}$.

On mesure T pour les oscillations dans le liquide : $T = 0{,}6\,\text{s}$.

On en déduit $\boxed{Q = 0{,}9}$ à l'aide de la question précédente.

Et on avait $Q = \omega_0\frac{m}{6\pi R\eta}$, d'où $\eta = \frac{2\pi}{T_0}\frac{m}{6\pi RQ}$, soit donc $\boxed{\eta = \frac{m}{3RT_0Q} = 0{,}61\,\text{Pa}\cdot\text{s}.}$

Dans un liquide très visqueux

26 - $\boxed{u(t) = u_{\text{homogène}} + \underbrace{u_{\text{part}}}_{\text{nulle ici}} = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t},}$ avec r_1 et r_2 les racines du polynome caractéristique :

$$\boxed{r_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{2} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}\right) \text{ et } r_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{2} - \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}\right).}$$

27 - $\star$ Les conditions initiales sont : $u(0) = z(0) - z_{\text{éq}} = L$ et $\dot{u}(0) = \dot{z}(0) = 0$.

$\star$ $u(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ donc $u(0) = A + B$. Donc $A + B = L$.

$\star$ $\dot{u}(t) = Ar_1\mathrm{e}^{r_1 t} + Br_2\mathrm{e}^{r_2 t}$ donc $\dot{u}(0) = Ar_1 + Br_2$. Donc $Ar_1 + Br_2 = 0$, d'où $A = -B\dfrac{r_2}{r_1}$.

On injecte dans $A + B = L$: $-B\dfrac{r_2}{r_1} + B = L$, d'où $\boxed{B = \dfrac{L}{1 - \dfrac{r_2}{r_1}} = \dfrac{Lr_1}{r_1 - r_2}.}$

Et on a donc $A = -B\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{L(-r_2/r_1)}{1 - \dfrac{r_2}{r_1}}$ soit $\boxed{A = \dfrac{Lr_2}{r_2 - r_1}.}$

28 - $\tau = 1/r_1$ ou $1/r_2$ (le plus grand des deux).

IV Chute d'une bille dans un fluide visqueux

29 - `nb_iterations = fin/dt`.

30 - Dans l'équation à résoudre, on remplace $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ par $(v(t+\mathrm{d}t) - v(t))/\mathrm{d}t$:

$$\frac{v(t+\mathrm{d}t) - v(t)}{\mathrm{d}t} + a \times v^2 = a \times v_{\text{lim}}^2,$$

et on isole $v(t+\mathrm{d}t)$:

$$v(t+\mathrm{d}t) = v(t) + \mathrm{d}t \times a(v_{\text{lim}}^2 - v^2).$$

On a donc l'actualisation suivante : `v = v + dt*a*(vlim**2-v**2)`.

Quand au temps, le nouveau temps est simplement augmenté de $\mathrm{d}t$: `t = t + dt`.

31 - `plt.plot(liste_t,liste_v)`.