Fiche méthode
Maths

Correction – Entraînement au calcul

I Trigonométrie

1 - $\cos(\omega t - kx + \pi/2) = -\sin(\omega t - kx)$.

2 - $\cos(\omega t - kx + \pi) = -\cos(\omega t - kx)$.

3 - $\sin(\omega t - kx) = \cos(\pi/2 - [\omega t - kx]) = \cos(\omega t - kx - \pi/2)$.

II Géométrie, exemples

III Volumes, surfaces, périmètres

IV Manipuler les fractions, résoudre des équations

1 - $-\dfrac{1}{4}$

2 - $\dfrac{13}{12}$

3 - $-\dfrac{2}{3}$

4 - $\dfrac{OA - OA'}{OA' \times OA}$

5 - $x = \dfrac{df'}{d + f'} - d$

6 - On résout (inconnues d et t_0) :

$$\begin{cases} c_s = \dfrac{d}{t_s - t_0} \\ c_p = \dfrac{d}{t_p - t_0} \end{cases}$$

La première équation donne $d = (t_s - t_0)c_s$.

On injecte dans la seconde et on cherche à isoler t_0 :

$$\begin{aligned} & c_p = \frac{d}{t_p - t_0} \\ \Leftrightarrow\ & c_p(t_p - t_0) = (t_s - t_0)c_s \\ \Leftrightarrow\ & (c_s - c_p)t_0 = t_s c_s - c_p t_p \\ \Leftrightarrow\ & t_0 = \frac{t_s c_s - c_p t_p}{c_s - c_p} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{t_0 = \frac{t_p c_p - c_s t_s}{c_p - c_s}.} \end{aligned}$$

Puis on injecte ceci dans la première :

$$\begin{aligned}
& d = (t_s - t_0)c_s \\
\Leftrightarrow\ & d = t_s c_s - \frac{t_p c_p - -c_s t_s}{c_p - c_s}\, c_s \\
\Leftrightarrow\ & d = \frac{t_s c_s (c_p - c_s)}{c_p - c_s} - \frac{t_p c_p c_s - c_s^2 t_s}{c_p - c_s} \\
\Leftrightarrow\ & d = \frac{t_s c_s c_p - t_s c_s^2 - t_p c_p c_s + c_s^2 t_s}{c_p - c_s} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{d = \frac{(t_s - t_p) c_p c_s}{c_p - c_s}}
\end{aligned}$$

A.N. : $\boxed{d = 469\,\mathrm{km}.}$

7 - On résout (inconnues f_0 et v) :

$$\begin{cases} f_1 = f_0 \times \dfrac{c}{c - v} \\ f_2 = f_0 \times \dfrac{c}{c + v} \end{cases}$$

On divise la première équation par la seconde, ce qui donne $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{c+v}{c-v}$. Ceci implique :

$$\begin{aligned}
& \frac{f_1}{f_2}(c - v) = c + v \\
\Rightarrow\ & \left(\frac{f_1}{f_2} - 1\right) c = v \left(\frac{f_1}{f_2} + 1\right) \\
\Rightarrow\ & v = c\, \frac{\frac{f_1}{f_2} - 1}{\frac{f_1}{f_2} + 1} \\
\Rightarrow\ & \boxed{v = c\, \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}}
\end{aligned}$$

À partir de là, on peut isoler f_0 dans la toute première équation et utiliser l'expression de v ci-dessus :

$$\begin{aligned}
& f_1 = f_0 \times \frac{c}{c - v} \\
\Rightarrow\ & f_0 = f_1\, \frac{c - v}{c} \\
\Rightarrow\ & f_0 = f_1 - \frac{v}{c}\, f_1 \\
\Rightarrow\ & f_0 = f_1 - \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}\, f_1 \\
\Rightarrow\ & f_0 = \frac{f_1(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2} - \frac{f_1^2 - f_1 f_2}{f_1 + f_2} \\
\Rightarrow\ & f_0 = \frac{f_1^2 + f_2 f_1 - f_1^2 + f_1 f_2}{f_1 + f_2} \\
\Rightarrow\ & \boxed{f_0 = \frac{2 f_1 f_2}{f_1 + f_2}}
\end{aligned}$$

A.N. : $f_0 = 435\,\mathrm{Hz}$ et $v = -82{,}7\,\mathrm{m/s}$ (soit $298\,\mathrm{km/h}$).

V Résoudre une équation du second degré

1 - $\Delta = d^2 + 8d^2 = 9d^2 > 0$, solutions $x_+ = \dfrac{d+3d}{4} = d$ et $x_- = -d/2$.

2 -

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{x(D-x)} + \frac{D-x}{x(D-x)} = \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x+D-x}{x(D-x)} = \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{D}{x(D-x)} = \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow\ & Df' = x(D-x) \\ \Leftrightarrow\ & Df' = xD - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - Dx + Df' = 0. \end{aligned}$$

On obtient un trinome. Discriminant : $\Delta = D^2 - 4Df' = D(D-4f')$.

Il y a des solutions x réelles seulement si $\Delta \geq 0$, donc seulement si $\boxed{D \geq 4f'.}$

Dans ce cas, les solutions sont : $\boxed{x_1 = \dfrac{D+\sqrt{\Delta}}{2}}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{D-\sqrt{\Delta}}{2}.}$

VI Exponentielle et logarithme

1 - $t = \tau \, \ln 2$.

2 - $t = \tau \, \ln 100 \simeq 4{,}6\tau$.

VII Puissances

1 - $\dfrac{10^3 \times 10^{-10}}{(10^{-2})^3} = 10^{3-10+6} = 10^{-1}$

2 - $\dfrac{(10^4)^2 \times 10^{-34}}{(10^{-1})^2 \times (10^{0{,}5})^2} = 10^{8-34+2-1} = 10^{-25}$

3 - $\dfrac{\sqrt{10^3 \times 10^5}}{(10^8)^{1/4}} = 10^{8/2-8/4} = 10^2$

4 - x^{-3a}

5 - x^{2-4a}

6 - $x^{\frac{3}{2}}$

VIII Calculs de dérivées

IX Primitives et intégrales

Primitives

1 - $f(t) = \cos(\omega t)$

– Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \dfrac{\omega\cos(\omega t)}{\omega} = \cos(\omega t) = f(t)$, c'est correct.

2 - $f(t) = \sin(\omega t)$

– Primitive : $F(t) = -\dfrac{\cos(\omega t)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = -\dfrac{-\omega\sin(\omega t)}{\omega} = \sin(\omega t) = f(t)$, c'est correct.

3 - $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

– Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t + \varphi)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \dfrac{\omega\cos(\omega t + \varphi)}{\omega} = \cos(\omega t + \varphi) = f(t)$, c'est correct.

4 - $f(t) = \cos(4\omega t + \varphi)$

– Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t + \varphi)}{4\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \dfrac{4\omega\cos(4\omega t + \varphi)}{4\omega} = \cos(4\omega t + \varphi) = f(t)$, c'est correct.

5 - $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1$

– Primitive : $F(t) = 2\dfrac{t^4}{4} + 6\dfrac{t^3}{3} + 7\dfrac{t^2}{2} + t = \dfrac{t^4}{2} + 2t^3 + \dfrac{7t^2}{2} + t$.

– Vérification : $F'(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1 = f(t)$, c'est correct.

Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes, qui correspondent au calcul de la valeur moyenne ou quadratique de certains signaux. À chaque fois, $T = 2\pi/\omega$.

6 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}s_0\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{s_0}{T}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)\right]_0^T \\
&= \frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)\right) \\
&= \frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

7 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0\sin(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T s_0\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t &= \frac{s_0}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\
&= \frac{s_0}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)\right]_0^T\\
&= -\frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\cos(\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+\varphi)-\cos(\varphi)\right)\\
&= -\frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\underbrace{\cos(2\pi+\varphi)}_{=\cos\varphi}-\cos(\varphi)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

8 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

Pour obtenir la période il faut se débarrasser du carré en utilisant la formule

$$\cos(2x)=2\cos^2 x-1,\quad \text{soit donc}\quad \cos^2 x=\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0^2\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2}+s_0^2\frac{1}{2},\\
&= \frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{s_0^2}{2},
\end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi}{\omega}$.

Calculons ensuite l'intégrale :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\
&\qquad= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{s_0^2}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&\qquad= \frac{1}{T}\int_0^T\frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{s_0^2}{2}\mathrm{d}t\\
&\qquad= \frac{1}{T}\frac{s_0^2}{2}\int_0^T\cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\frac{s_0^2}{2}\int_0^T\mathrm{d}t\\
&\qquad= \frac{s_0^2}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin[2\omega t+2\varphi]\right]_0^T+\frac{s_0^2}{2T}(T-0)\\
&\qquad= \frac{s_0^2}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\sin[2\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+2\varphi]-\sin(2\varphi)\right)+\frac{s_0^2T}{2T}\\
&\qquad= \frac{s_0^2}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\underbrace{\sin[2\times2\pi+2\varphi]}_{=\sin(2\varphi)}-\sin(2\varphi)\right)+\frac{s_0^2}{2}\\
&\qquad= \frac{s_0^2}{2}
\end{aligned}$$

9 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

On utilise cette fois :

$$\cos(2x)=1-2\sin^2 x,\quad \text{soit donc}\quad \sin^2 x=-\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
s(t) &= -s_0^2\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2} + s_0^2\frac{1}{2}, \\
&= -\frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t + 2\varphi] + \frac{s_0^2}{2},
\end{aligned}
$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{\omega}$.
Pour la valeur moyenne on reprend presque exactement les calculs du cas précédent, à un signe moins près mais sans importante car en facteur du terme nul. On a donc encore le résultat $\dfrac{s_0^2}{2}$.