Fiche méthode
Maths

Entraînement au calcul

I Trigonométrie

Propriétés importantes

Valeurs remarquables :

- $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$
- $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$
- $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$
- $\cos(-\pi/2) = 0$ et $\sin(-\pi/2) = -1$

Remarque : Valeurs à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique.

Additions :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

En prenant $b = a$ on a donc :

- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

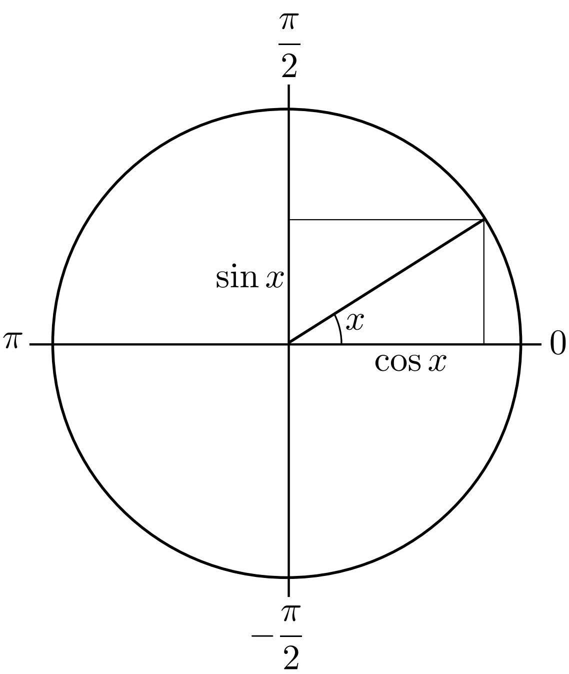
Formules avec π :

- $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$
- $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$

Formules avec $\pi/2$:

- $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$

Remarque : C'est à savoir retrouver avec un cercle trigonométrique, ou avec les formules d'additions ci-dessus (prendre $a = x$ et $b = \pi$ ou $b = \pi/2$).



Exercices pour s'entraîner :

1 - $\cos(\omega t - kx + \pi/2) = \pm \sin(\omega t - kx)$? (choisir le bon signe)

2 - $\cos(\omega t - kx + \pi) = \pm \cos(\omega t - kx)$? (choisir le bon signe)

3 - Exprimer $\sin(\omega t - kx)$ à l'aide d'un cosinus uniquement.

II Calculs de dérivées

Propriétés de la dérivation

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$
$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$
$$(g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x))$$

Dérivées usuelles

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

III Primitives et intégrales

Primitives

Propriétés importantes

Soit $f(t)$ une fonction. Une primitive de f est une fonction F telle que sa dérivée redonne f :

$$F'(t) = f(t).$$

Exemple : $f(t) = t$.

Une primitive est $F(t) = \dfrac{t^2}{2}$, car on a bien $F'(t) = t$.

Les primitives sont toujours à une constante près.
Par exemple ci-dessus, $F(t) = \frac{t^2}{2} + 5$ convient aussi.

Primitives usuelles

$$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1} + A$$
$$\cos x \to \sin x + A$$
$$\sin x \to -\cos x + A$$
$$\mathrm{e}^x \to \mathrm{e}^x + A$$
$$\frac{1}{x} \to \ln x + A$$

Avec A une constante d'intégration.

Lorsqu'on écrit une primitive, on vérifie à chaque fois que c'est bien correct en la dérivant : il faut alors retomber sur la fonction de départ !

Exercices pour s'entraîner : Pour chaque fonction $f(t)$ proposée ci-dessous, on demande a/

de trouver une primitive $F(t)$; puis b/ de dériver cette primitive (donc calcul de $F'(t)$) pour vérifier que l'on retombe bien sur $f(t)$ et que la primitive proposée en a/ est correcte.

4 - $f(t) = \cos(\omega t)$

5 - $f(t) = \sin(\omega t)$

6 - $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

7 - $f(t) = \cos(4\omega t + \varphi)$

8 - $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1$

Exemple de rédaction attendue pour la question 4 :
– $f(t) = \cos(\omega t)$
– a/ Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$.
– b/ Vérification par calcul de $F'(t)$: $F'(t) = \dfrac{\omega\cos(\omega t)}{\omega} = \cos(\omega t) = f(t)$, c'est donc correct.

Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes, qui correspondent au calcul de la valeur moyenne ou quadratique de certains signaux. À chaque fois, $T = 2\pi/\omega$.

9 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0 \cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t.$

10 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0 \sin(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t.$

11 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t.$

12 - $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t.$

Pour les carrés, on linéarisera en utilisant certaines des formules pour $\cos(2a)$ données dans l'encadré précédent.

Les réponses auxquelles il faut parvenir sont, pour les deux premières : 0 et 0, et pour les deux dernières : $\dfrac{s_0^2}{2}$ et $\dfrac{s_0^2}{2}$.

IV Puissances

Propriétés

$$(x^a)^b = x^{a\times b}$$
$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$
$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$
$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Autres propriétés

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$
$$x^a = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{a}}$$

Remarque : La dernière propriété se démontre facilement :

$$x^a = y \quad \Leftrightarrow \quad (x^a)^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad x^{a\times\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{a}}.$$

Exercices pour s'entraîner

Donner le résultat des valeurs suivantes sous la forme 10^n. Par exemple dans le premier cas on doit trouver 10^{-1} :

13 - $\dfrac{10^3 \times 10^{-10}}{(10^{-2})^3}$

14 - $\dfrac{(10^4)^2 \times 10^{-34}}{(10^{-1})^2 \times (10^{0,5})^2}$

15 - $\dfrac{\sqrt{10^3 \times 10^5}}{(10^8)^{1/4}}$

Écrire les expressions ci-dessous sous la forme de x élevé à une certaine puissance. Par exemple dans le premier cas on doit arriver à x^{-3a} :

16 - $\left(\dfrac{1}{x^a}\right)^3$

17 - $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^a}\right)^4$

18 - $x \times \sqrt{x}$