Partie III : structure de la matière

Correction – DM 5 – Monoxyde de carbone

1 - On utilise les règles de Pauli (au plus un électron par état quantique n, l, m_l, m_s, soit donc maximum deux électrons par case quantique), de Klechkowski (les niveaux sont remplis à $n+l$ croissant, et à $n+l = \text{cst}$ à n croissant), et de Hund (dans une même sous-couche, les électrons se placent pour maximiser le nombre de spins parallèles).

2 - Oxygène, $Z = 8$: $1s^2\,2s^2\,2p^4$, et carbone, $Z = 6$: $1s^2\,2s^2\,2p^2$.

3 - Les électrons de valence du carbone sont $2s^2\,2p^2$. Il y en a quatre, il est donc susceptible de former quatre liaisons. Ceci lui permet alors de respecter la règle de l'octet.

4 - Le carbone 12 et le carbone 13 sont les deux seuls isotopes stables du carbone. On les note $^{12}_{6}C$ et $^{13}_{6}C$.

5 - L'oxygène se situe sur la ligne 2, dans la colonne 16 (ceci se retrouve grâce à sa configuration électronique).

6 - Le souffre est au-dessous de l'oxygène.

7 - Nombre d'électrons de valence : 6 pour l'oxygène et 4 pour le carbone, donc 10 en tout, soit <u>5 doublets</u>.

On propose : $\ominus|C{\equiv}O|\oplus$

Vérifications : il y a bien 5 doublets ; O et C vérifie la règle de l'octet ; la charge totale est nulle (ce qui correspond à la charge de la molécule CO).

8 - Sur une même ligne, l'électronégativité augmente lorsqu'on se déplace vers la droite.

9 - On en conclut que O est plus électronégatif que C. La formule de Lewis ci-dessus n'est donc pas en accord avec les électronégativités du carbone et de l'oxygène, puisque d'après celles-ci se serait à l'oxygène d'attirer la charge négative. Il n'en reste pas moins que la règle de l'octet est vérifiée, ce qui est plus important que les considérations sur l'électronégativité.

DM 6 – Entraînement au calcul

I Résolution d'équations

1 -

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{D-x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{f'} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{x(D-x)}+\frac{D-x}{x(D-x)}=\frac{1}{f'} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x+D-x}{x(D-x)}=\frac{1}{f'} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{D}{x(D-x)}=\frac{1}{f'} \\
\Leftrightarrow\ & Df'=x(D-x) \\
\Leftrightarrow\ & Df'=xD-x^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-Dx+Df'=0.
\end{aligned}
$$

On obtient un trinome. Discriminant : $\Delta = D^2 - 4Df' = D(D-4f')$.

Il y a des solutions x réelles seulement si $\Delta \geq 0$, donc seulement si $\boxed{D \geq 4f'.}$

Dans ce cas, les solutions sont : $\boxed{x_1 = \dfrac{D+\sqrt{\Delta}}{2}}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{D-\sqrt{\Delta}}{2}.}$

2 - On résout (inconnues d et t_0) :

$$
\begin{cases}
c_s = \dfrac{d}{t_s - t_0} \\
c_p = \dfrac{d}{t_p - t_0}
\end{cases}
$$

La première équation donne $d = (t_s - t_0)c_s$.

On injecte dans la seconde et on cherche à isoler t_0 :

$$
\begin{aligned}
& c_p = \frac{d}{t_p - t_0} \\
\Leftrightarrow\ & c_p(t_p - t_0) = (t_s - t_0)c_s \\
\Leftrightarrow\ & (c_s - c_p)t_0 = t_s c_s - c_p t_p \\
\Leftrightarrow\ & t_0 = \frac{t_s c_s - c_p t_p}{c_s - c_p} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{t_0 = \frac{t_p c_p - c_s t_s}{c_p - c_s}.}
\end{aligned}
$$

Puis on injecte ceci dans la première :

$$
\begin{aligned}
& d = (t_s - t_0)c_s \\
\Leftrightarrow\ & d = t_s c_s - \frac{t_p c_p - -c_s t_s}{c_p - c_s}\, c_s \\
\Leftrightarrow\ & d = \frac{t_s c_s (c_p - c_s)}{c_p - c_s} - \frac{t_p c_p c_s - c_s^2 t_s}{c_p - c_s} \\
\Leftrightarrow\ & d = \frac{t_s c_s c_p - t_s c_s^2 - t_p c_p c_s + c_s^2 t_s}{c_p - c_s} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{d = \frac{(t_s - t_p) c_p c_s}{c_p - c_s}}
\end{aligned}
$$

A.N. : $\boxed{d = 469\,\mathrm{km.}}$

3 - On résout (inconnues f_0 et v) :

$$
\begin{cases}
f_1 = f_0 \times \dfrac{c}{c - v} \\
f_2 = f_0 \times \dfrac{c}{c + v}
\end{cases}
$$

On divise la première équation par la seconde, ce qui donne $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{c + v}{c - v}$. Ceci implique :

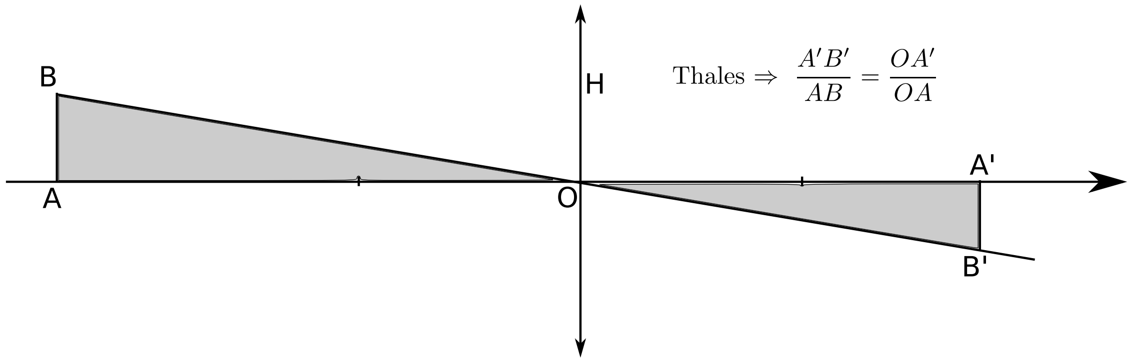
$$
\begin{aligned}
& \frac{f_1}{f_2}(c - v) = c + v \\
\Rightarrow\ & \left(\frac{f_1}{f_2} - 1\right) c = v \left(\frac{f_1}{f_2} + 1\right) \\
\Rightarrow\ & v = c\, \frac{\frac{f_1}{f_2} - 1}{\frac{f_1}{f_2} + 1} \\
\Rightarrow\ & \boxed{v = c\, \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}}
\end{aligned}
$$

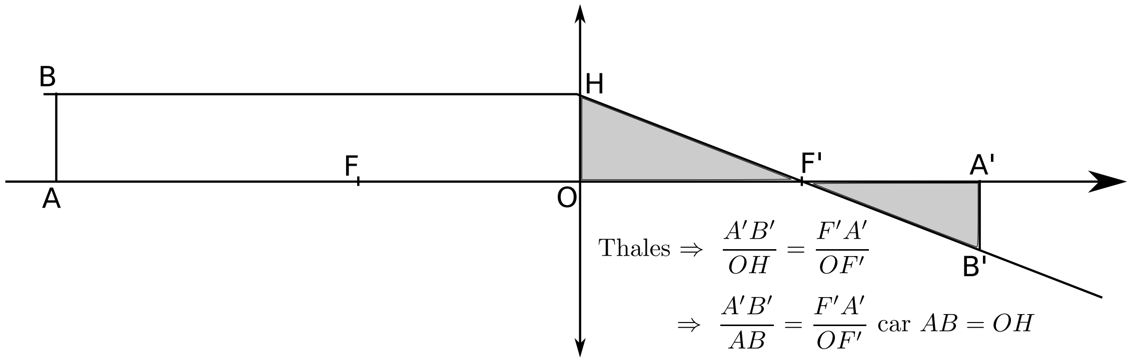
À partir de là, on peut isoler f_0 dans la toute première équation et utiliser l'expression de v ci-dessus :

$$
\begin{aligned}
& f_1 = f_0 \times \frac{c}{c - v} \\
\Rightarrow\ & f_0 = f_1\, \frac{c - v}{c} \\
\Rightarrow\ & f_0 = f_1 - \frac{v}{c}\, f_1 \\
\Rightarrow\ & f_0 = f_1 - \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}\, f_1 \\
\Rightarrow\ & f_0 = \frac{f_1 (f_1 + f_2)}{f_1 + f_2} - \frac{f_1^2 - f_1 f_2}{f_1 + f_2} \\
\Rightarrow\ & f_0 = \frac{f_1^2 + f_2 f_1 - f_1^2 + f_1 f_2}{f_1 + f_2} \\
\Rightarrow\ & \boxed{f_0 = \frac{2 f_1 f_2}{f_1 + f_2}}
\end{aligned}
$$

A.N. : $f_0 = 435\,\mathrm{Hz}$ et $v = -82{,}7\,\mathrm{m/s}$ (soit $298\,\mathrm{km/h}$).

II Géométrie





4 - Cf figure ci-dessus : on a $\gamma = \dfrac{OA'}{OA}$, et $\gamma = \dfrac{F'A'}{OF'}$.

5 - On a donc bien $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{F'A'}{F'O}$.

6 -

$$\begin{aligned} & \frac{OA'}{OA} = \frac{F'A'}{F'O} \\ \Rightarrow\ & \frac{OA'}{OA} = \frac{OA'-f'}{f'} \\ \Rightarrow\ & \frac{OA'}{OA} = \frac{OA'}{f'} - 1 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{OA'} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \end{aligned}$$

7 - On peut reprendre le calcul précédent, mais en le menant différemment :

$$\begin{aligned} & \frac{OA'}{OA} = \frac{F'A'}{F'O} \\ \Rightarrow\ & \frac{f'+F'A'}{f'+FA} = \frac{F'A'}{f'} \\ \Rightarrow\ & (f'+F'A')f' = F'A'(f'+FA) \\ \Rightarrow\ & f'^2 + F'A' \times f' = F'A' \times f' + F'A' \times FA \\ \Rightarrow\ & f'^2 = F'A' \times FA \end{aligned}$$

Une autre solution est d'effectuer un théorème de Thalès dans un autre triangle (en traçant un rayon incident passant par F).

III Trigonométrie

8 - $\cos(\omega t - kx + \pi/2) = -\sin(\omega t - kx)$.

9 - $\cos(\omega t - kx + \pi) = -\cos(\omega t - kx)$.

10 - $\sin(\omega t - kx) = \cos(\pi/2 - [\omega t - kx]) = \cos(\omega t - kx - \pi/2)$.

IV Primitives et intégrales

Primitives

Pour chaque fonction $f(t)$ proposée ci-dessous, on demande de trouver une primitive $F(t)$, puis dans un second temps de dériver cette primitive (donc calcul de $F'(t)$) pour vérifier que l'on retombe bien sur $f(t)$ et que la primitive est correcte.

11 - $f(t) = \cos(\omega t)$

- Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$.
- Vérification : $F'(t) = \dfrac{\omega \cos(\omega t)}{\omega} = \cos(\omega t) = f(t)$, c'est correct.

12 - $f(t) = \sin(\omega t)$

- Primitive : $F(t) = -\dfrac{\cos(\omega t)}{\omega}$.
- Vérification : $F'(t) = -\dfrac{-\omega \sin(\omega t)}{\omega} = \sin(\omega t) = f(t)$, c'est correct.

13 - $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

- Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t + \varphi)}{\omega}$.
- Vérification : $F'(t) = \dfrac{\omega \cos(\omega t + \varphi)}{\omega} = \cos(\omega t + \varphi) = f(t)$, c'est correct.

14 - $f(t) = \cos(4\omega t + \varphi)$

- Primitive : $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t + \varphi)}{4\omega}$.
- Vérification : $F'(t) = \dfrac{4\omega \cos(4\omega t + \varphi)}{4\omega} = \cos(4\omega t + \varphi) = f(t)$, c'est correct.

15 - $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1$

- Primitive : $F(t) = 2\dfrac{t^4}{4} + 6\dfrac{t^3}{3} + 7\dfrac{t^2}{2} + t = \dfrac{t^4}{2} + 2t^3 + \dfrac{7t^2}{2} + t$.
- Vérification : $F'(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1 = f(t)$, c'est correct.

Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes, qui correspondent au calcul de la valeur moyenne ou quadratique de certains signaux. À chaque fois, $T = 2\pi/\omega$.

16 - $\frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$.

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}s_0\int_0^T \cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\ &= \frac{s_0}{T}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)\right]_0^T\\ &= \frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(\omega T+\varphi)-\sin(\varphi)\right)\\ &= \frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(2\pi+\varphi)-\sin(\varphi)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

17 - $\frac{1}{T}\int_0^T s_0\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$.

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T s_0\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t &= \frac{s_0}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\ &= \frac{s_0}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)\right]_0^T\\ &= -\frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\cos(\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+\varphi)-\cos(\varphi)\right)\\ &= -\frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\underbrace{\cos(2\pi+\varphi)}_{=\cos\varphi}-\cos(\varphi)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

18 - $\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$.

Pour obtenir la période il faut se débarrasser du carré en utilisant la formule

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1, \quad \text{soit donc} \quad \cos^2 x = \frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}s(t) &= s_0^2\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2}+s_0^2\frac{1}{2},\\ &= \frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{s_0^2}{2},\end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$.

Calculons ensuite l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{s_0^2}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{s_0^2}{2}\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{1}{T}\frac{s_0^2}{2}\int_0^T \cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\frac{s_0^2}{2}\int_0^T\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{s_0^2}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin[2\omega t+2\varphi]\right]_0^T+\frac{s_0^2}{2T}(T-0) \\
&\qquad = \frac{s_0^2}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\sin[2\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+2\varphi]-\sin(2\varphi)\right)+\frac{s_0^2T}{2T} \\
&\qquad = \frac{s_0^2}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\underbrace{\sin[2\times 2\pi+2\varphi]}_{=\sin(2\varphi)}-\sin(2\varphi)\right)+\frac{s_0^2}{2} \\
&\qquad = \frac{s_0^2}{2}
\end{aligned}
$$

19 - $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$.

On utilise cette fois :

$$\cos(2x)=1-2\sin^2 x,\quad \text{soit donc}\quad \sin^2 x=-\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
s(t) &= -s_0^2\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2}+s_0^2\frac{1}{2}, \\
&= -\frac{s_0^2}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]+\frac{s_0^2}{2},
\end{aligned}
$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi}{\omega}$.

Pour la valeur moyenne on reprend presque exactement les calculs du cas précédent, à un signe moins près mais sans importante car en facteur du terme nul. On a donc encore le résultat $\dfrac{s_0^2}{2}$.