

Remarque : exercice avec \star : exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu'il faut savoir faire”) | $[\bullet \circ \circ]$: difficulté des exercices

I Méthode de mesure de M [• ◦ ◦]

1 - L'oscilloscope étant supposé idéal, tout se passe comme si la bobine 2 était en circuit ouvert. On a donc $i_2 = 0$.

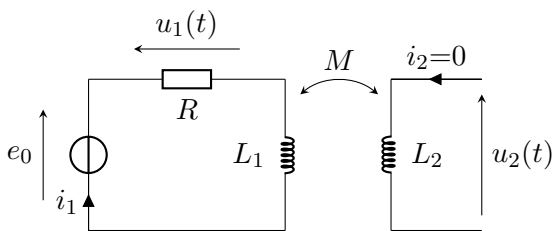
D'après la loi de comportement d'une bobine, on aurait

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} = 0.$$

Mais ceci ne s'applique pas ici, car cette loi ne prend en compte que le phénomène d'auto-induction. Or il y a aussi un couplage mutuel avec le second circuit. Il faut donc appliquer la méthode vue dans le cours (flux, loi de Faraday, fem, loi des mailles...).

2 - On suit la méthode habituelle.

\star Étape 1 : orienter les circuits. C'est fait par le choix du sens du courant sur le schéma.



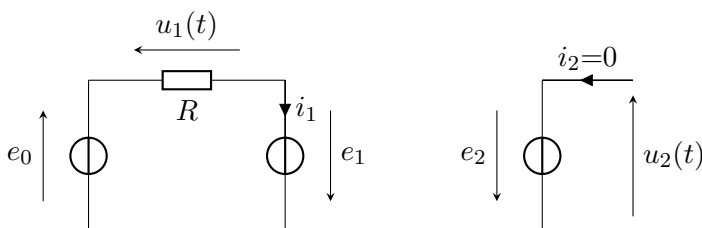
\star Étape 2 : exprimer les flux. Ici :

$$\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1} = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 = L_1 i_1 \quad (\text{car } i_2 = 0),$$

$$\Phi_{\text{tot} \rightarrow 2} = \Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1 = M i_1.$$

\star Étape 3 : schéma électrique équivalent, où tous les phénomènes d'induction sont remplacés par des fem (convention générateur), dont la valeur est donnée par la loi de Faraday :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_{\text{tot} \rightarrow 2}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}.$$



Étape 4 : La loi des mailles dans le circuit 2 indique que :

$$u_2 = -e_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

Or $u_1 = R i_1$, et on a donc

$$u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}.$$

3 - Il faut traduire la relation précédente en représentation complexe :

$$\underline{u}_2 = j\omega \frac{M}{R} \underline{u}_1.$$

L'amplitude mesurée à l'oscilloscope est, pour le signal 1 : $U_1 = |\underline{u}_1|$, et pour le signal 2 : $U_2 = |\underline{u}_2|$. Donc en prenant le module de l'équation ci-dessus :

$$U_2 = \omega \frac{M}{R} U_1 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{R U_2}{2\pi f U_1} = 1,3 \text{ mH}.$$

On a donc bien une méthode de mesure expérimentale de M .

4 - L'inductance mutuelle sera maximale lorsque les bobines ont leurs deux axes alignés (elles sont l'une en face de l'autre), et le plus proche possible.

II Modèle du transformateur idéal [• ○ ○]

1 - ★ Circuit 1 :

On considère d'abord le flux φ_1 à travers une seule spire (un seul tour du fil).

D'après la règle de la main droite, la normale est vers le haut, donc dans le même sens que l'orientation choisie pour le flux total dans une section Φ . Donc $\varphi_1 = +\Phi$.

L'enroulement primaire comporte N_1 spires, donc le flux total à travers ce circuit primaire est $\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1} = N_1 \Phi$.

★ Circuit 2 :

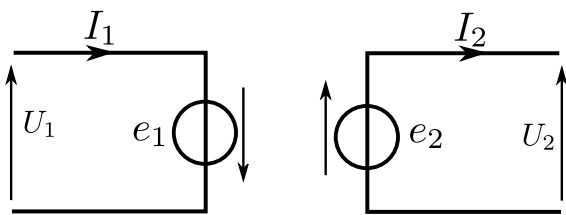
Notons de même le flux φ_2 à travers une seule spire (un seul tour du fil).

La normale est vers le bas, donc dans le même sens que l'orientation choisie pour le flux total dans une section Φ . Donc $\varphi_2 = +\Phi$.

L'enroulement primaire comporte N_2 spires, donc le flux total à travers ce circuit secondaire est $\Phi_{\text{tot} \rightarrow 2} = N_2 \Phi$.

2 - Il y a deux enroulements donc deux circuits électriques équivalents : un pour le primaire, un pour le secondaire.

Pour chacun, on remplace l'enroulement par un générateur de fem donnée par la loi de Faraday, orienté en convention générateur.



$$e_1 = -\frac{d\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1}}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi}{dt},$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_{\text{tot} \rightarrow 2}}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

3 - D'après les deux expressions précédentes, on a $\frac{e_1}{N_1} = \frac{e_2}{N_2}$, soit encore $\frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1}$.

On établit enfin les équations électriques en écrivant la loi des mailles dans chacun des deux circuits : $U_1 + e_1 = 0$ et $U_2 = e_2$.

On a donc finalement

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1} = -m.$$

Il s'agit là de la relation classique pour le modèle du transformateur idéal.

4 - On a d'après l'énoncé $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, donc $U_1 i_1 = U_2 i_2$, et donc $\frac{i_2}{i_1} = \frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}$.

1 - On a les schémas suivants :

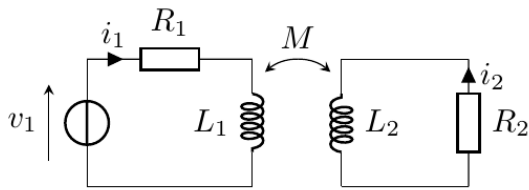


Schéma de principe

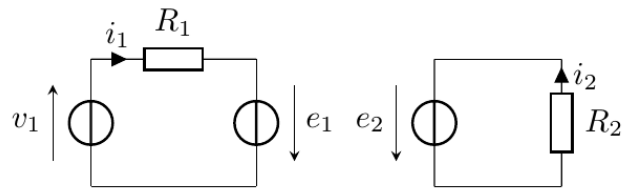


Schéma avec générateurs induits

Étape 1, orienter : c'est fait par le choix des sens des courants ci-dessus.

Étape 2 : exprimer les flux. On a comme d'habitude

$$\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1} = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_{\text{tot} \rightarrow 2} = \Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1.$$

Étape 3 : schéma électrique équivalent (ci-dessus), dans lequel les fem induites sont

$$e_1 = -\frac{d\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_{\text{tot} \rightarrow 2}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Étape 4 : lois de mailles, d'où

$$v_1 + e_1 = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad e_2 = R_2 i_2.$$

En remplaçant :

$$v_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2.$$

2 - Passage en complexes :

$$v_1 - j\omega L_1 \dot{i}_1 - j\omega M \dot{i}_2 = R_1 \dot{i}_1 \quad \text{et} \quad -j\omega L_2 \dot{i}_2 - j\omega M \dot{i}_1 = R_2 \dot{i}_2.$$

Il faut isoler le rapport \dot{i}_2/\dot{i}_1 , ce qui se fait avec la seconde équation :

$$\frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1} = \frac{-j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} \underset{R_2 \ll L_2 \omega}{\approx} \frac{-M}{L_2}.$$

Enfin, le rapport des amplitudes s'obtient en prenant le module (rappel : $\frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1} = \frac{I_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}}{I_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}}$, donc le module élimine les exponentielles complexes) :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\omega |M|}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}} \underset{R_2 \ll L_2 \omega}{\approx} \frac{|M|}{L_2}.$$

3 - On utilise la première loi des mailles, dans laquelle on remplace \dot{i}_2 :

$$v_1 - j\omega L_1 \dot{i}_1 - j\omega M \left(\frac{-M}{L_2} \dot{i}_1 \right) = R_1 \dot{i}_1,$$

puis on exprime l'impédance

$$v_1 = \left(\underbrace{R_1}_{\text{négligé}} + j\omega L_1 - \frac{j\omega M^2}{L_2} \right) \dot{i}_1,$$

$$\underline{Z}_e = \frac{v_1}{\dot{i}_1} = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right).$$

$$4 - \text{On a } I_2 = I_1 \times \frac{|M|}{L_2} = \frac{V_1}{|Z_e|} \times \frac{|M|}{L_2} = \frac{V_1}{\left|L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right| \omega} \times \frac{|M|}{L_2} = \frac{V_1 |M|}{|L_1 L_2 - M^2| \omega}.$$

On a vu dans une remarque du cours qu'on a toujours $M^2 \leq L_1 L_2$ (avec égalité si couplage parfait), donc on peut enlever la valeur absolue en bas, et on a

$$I_2 = V_1 \times \frac{|M|}{(L_1 L_2 - M^2) \omega} = 135 \text{ A.}$$

Puis :

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} R_2 I_2^2 = 75,7 \text{ W.}$$

5 - Si on soulève la casserole, celle-ci intercepte moins de lignes de champ. Donc $|M|$ diminue.

On voit donc que I_2 décroît, et par suite, \mathcal{P}_2 décroît également. Il faut donc maximiser $|M|$ pour maximiser la puissance de chauffage.

Remarque : Si le couplage est parfait, on a $M^2 = L_1 L_2$ et la puissance \mathcal{P}_2 devient infinie. D'où vient cette puissance? L'énergie étant conservée, elle provient du générateur v_1 , qui donc appelle un courant i_1 de plus en plus important.

En réalité cette divergence provient du fait qu'on a négligé les résistances. Si on conserve R_2 , on obtient l'expression $i_2 = v_1 \times \frac{-M}{R_2 L_1 + j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$, qui ne diverge plus.

IV Solénoïdes imbriqués

[•••]

1 - ★ Inductance propre L_1 :

- La bobine 1 produit un champ $\vec{B}_1 = \mu_0 n i_1 \vec{e}_z$ avec $n = N/l$.
- Flux de ce champ \vec{B}_1 au travers d'une seule spire de la bobine 1 :

$$\Phi_{\text{une spire}} = \vec{B}_1 \cdot (\pi r_1^2) \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{l} i_1$$

- Flux total créé par la bobine 1 à travers elle-même :

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = N \times \phi_{1 \text{ spire}} \quad \text{donc} \quad \Phi_{1 \rightarrow 1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{l} i_1.$$

- Inductance propre : par définition, $\Phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1$ donc

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{l}.$$

★ Inductance propre L_2 : par la même démarche,

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{l}.$$

★ Inductance mutuelle M : comme le champ créé par la bobine 2 est uniforme à l'intérieur de la bobine 1, alors que la réciproque n'est pas vraie, il est plus simple de calculer M à partir du flux créé par 2 au travers de 1.

- Flux créé par 2 au travers d'une seule spire de la bobine 1 :

$$\Phi_{\text{une spire}} = \vec{B}_2 \cdot (\pi r_1^2) \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{l} i_2$$

- Flux total créé par la bobine 2 au travers de la bobine 1 :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N \Phi_{\text{une spire}} \quad \text{donc} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{l} i_2.$$

- Inductance mutuelle : par définition, $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$ donc

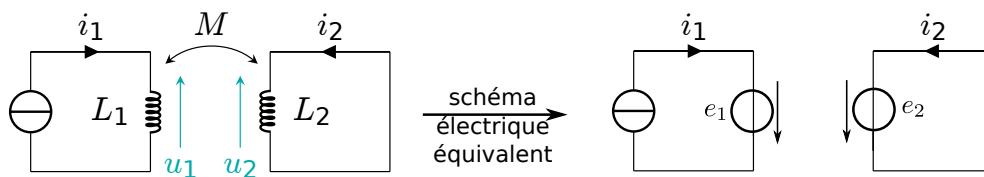
$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{l}. \quad (1)$$

Remarque : On peut aussi calculer M dans l'autre sens, en calculant le flux du champ créé par 1 à travers 2. Mais attention : 1 crée un flux dans 2 sur une surface S_1 seulement, donc on a

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N \times \vec{B}_1 \cdot (\pi r_1^2) \vec{e}_z = N \times \mu_0 \frac{N}{l} i_1 \pi r_1^2.$$

Or $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$, d'où l'expression $M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{l}$, ce qui revient bien au même.

2 - On est dans la situation suivante :



Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant i_1 , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a couplage inductif entre les deux circuits.

Les fem valent, comme d'habitude :

$$e_1 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}) = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2}) = -\frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M i_1) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

D'après la loi des mailles, $e_2 = 0$ donc

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

et par intégration

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} i_1 + \text{cst}.$$

Comme la bobine numéro 2 n'est pas relié à un générateur, il ne peut pas y avoir de courant continu (il serait dissipé par la résistance, même infime, des câbles). La constante est donc nulle, et on a finalement :

$$i_2(t) = -\frac{M}{L_2} I \cos(\omega t),$$

d'amplitude

$$I_2 = \frac{M}{L_2} I = \frac{r_1^2}{r_2^2} I.$$

3 - D'après le principe de superposition, en un point M se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{l} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

d'où en remplaçant

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{l} \left(1 - \frac{M}{L_2}\right) I \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

V Détecteur de métaux [●○○]

1 - Voir EC3.

2 - La seconde équation permet d'obtenir i_2 :

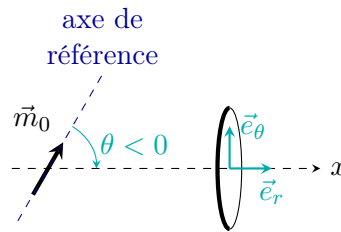
$$(R + L_2 j\omega) i_2 = -M j\omega i_1 \quad \text{d'où} \quad i_2 = -\frac{M j\omega i_1}{R_2 + L_2 j\omega}.$$

Il faut ensuite prendre la première équation et injecter cette expression de i_2 :

$$e_0 = R_1 i_1 + L_1 j\omega i_1 + M j\omega \frac{-M j\omega i_1}{R_2 + L_2 j\omega}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{Z_1 = \frac{e_0}{i_1} = R_1 + L_1 j\omega + \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + L_2 j\omega}.}$$

VI Principe d'un générateur synchrone [●●●]

1 - ★ On voit sur le dessin ci-dessous que l'angle entre le moment et l'axe de la spire est $\theta = -\omega t$ (il est bien négatif). On a aussi $r = x$.



Par conséquent, au centre de la spire :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3} (2 \cos \omega t \vec{e}_r - \sin \omega t \vec{e}_\theta).$$

Le calcul du flux impose de choisir une orientation, et nous prenons le choix du schéma ci-contre. La normale est alors \vec{e}_x , ce qui est aussi \vec{e}_r , et donc

$$\Phi = \vec{B} \cdot (\pi a^2) \vec{e}_r = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} 2 \cos \omega t \times \pi a^2, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Phi = \frac{\mu_0 a^2 m_0}{2x^3} \cos \omega t.}$$

★ La fem induite est donc
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 a^2 m_0 \omega}{2x^3} \sin \omega t.$$

Remarque : On peut vérifier le signe, puisque à $t \gtrsim 0$ l'aimant se désaligne et donc le flux décroît, donc d'après la loi de Faraday $e > 0$, c'est bien ce qu'on a.

★ Un schéma électrique équivalent, et une loi des mailles, permet d'obtenir le courant
$$i = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0 a^2 m_0 \omega}{2R x^3} \sin \omega t.$$

★ La puissance qu'elle reçoit est

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{élec spire}} = e \times i = R i^2 = \frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2 \omega^2}{4R x^6} \sin^2 \omega t.}$$

2 - Il faut d'abord calculer le champ magnétique créé par la spire au niveau du centre de l'aimant.

La spire réalise un moment magnétique donné par $\boxed{\vec{m}_s = \pi a^2 i \vec{e}_x}$, et l'énoncé donne justement l'expression du champ créé par un moment magnétique.

Attention au repérage : cette fois on a un repère centré sur le centre de la spire, donc dans ce repère l'aimant a pour coordonnées polaires $r = x$ et $\theta = \pi$, et au niveau de l'aimant on a $\vec{e}_r = -\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_y$.

Donc le champ créé par la spire au niveau de l'aimant vaut :

$$\vec{B}_s(O) = \frac{\mu_0 m_s}{4\pi x^3} (2 \cos \pi(-\vec{e}_x) + \sin \pi(-\vec{e}_y)) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi x^3} \vec{e}_x.$$

Le couple subit par l'aimant est donc :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m}_0 \wedge \vec{B}_s(O) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi x^3} \underbrace{\vec{m}_0 \wedge \vec{e}_x}_{=-m_0 \sin \omega t \vec{e}_z}$$

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0 m_s}{2\pi x^3} m_0 \sin \omega t \vec{e}_z$$

En remplaçant m_s par son expression $m_s = \pi a^2 i$, et i par l'expression de la question 1, on obtient :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2 \omega}{4R x^6} \sin^2 \omega t \vec{e}_z.$$

On remarque que ce couple est négatif, c'est-à-dire qu'il s'oppose à la rotation de l'aimant dans le sens positif autour de l'axe. C'est normal : les effets de l'induction (ici le courant i dans la spire, et donc la production de ce couple) s'opposent aux causes qui les produisent (donc s'opposent à la rotation de l'aimant).

3 - La puissance à fournir est

$$\mathcal{P}_{\text{fournie à l'aimant}} = \Gamma \omega = \frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2 \omega^2}{4R x^6} \sin^2 \omega t.$$

On trouve précisément la même chose que pour la puissance électrique : $\mathcal{P}_{\text{fournie à l'aimant}} = \mathcal{P}_{\text{elec spire}}$.

Ceci explique donc bien qu'on a une conversion toute la puissance mécanique fournie à l'aimant en une puissance électrique.