Partie IX : Champ magnétique et induction
Chapitre 1

Correction – TD – Champ magnétique : propriétés et actions

I Rail gun [● ○ ○]

1 - On choisit un axe Ox de gauche à droite.

a - On exprime $\vec{F} = I\overrightarrow{BA} \wedge \vec{B}_0 = IlB_0\vec{e}_x$ (axe x orienté vers la droite sur la figure).
Le travail d'une force constante (c'est le cas ici) sur une distance d est

$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd = IlB_0 d.$$

b - On utilise le théorème de l'énergie cinétique : $E_c(f) - E_c(i) = W(\vec{F})$, avec

- $E_c(f) = \dfrac{1}{2}mv_f^2$ et $v_f = 2.4 \times 10^3$ m/s,
- $E_c(i) = 0$ (immobile au départ),
- $W(\vec{F}) = F \times d = IlB_0 d$.

On a donc

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = IlB_0 d, \quad \text{d'où} \quad \boxed{B_0 = \frac{mv_f^2}{2Ild} = 5{,}76 \times 10^3\,\mathrm{T}.}$$

Remarque : Il est aussi possible de passer par un PFD, que l'on intègre pour avoir $v(t)$ puis $x(t)$. Mais c'est plus long.

c - Ceci est beaucoup trop élevé pour un champ créé de façon permanente.

Remarque : Le courant I est supposé imposé par le générateur et est donc constant. La force de Laplace est donc constante et les phénomènes d'induction (du prochain chapitre !) n'interviennent pas.

2 - L'idée est cette fois de se servir du champ magnétique produit par les rails eux-même.

À une distance r d'un fil, le champ est donné par $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Pour $r = 10\,\mathrm{cm}$, on a $B = 2\,\mathrm{T}$.

Si on reprend l'expression précédente, la vitesse finale est alors $v_f = \sqrt{\dfrac{2IlB_0 d}{m}} = 1{,}4 \times 10^3$ m/s, ce qui est bien du bon ordre de grandeur.

II Méthode de Gauss de mesure du champ magnétique [● ○ ○]

1 - Le champ $\vec{B}$ exerce un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = -BM\sin\theta\,\vec{e}_z$ sur le barreau, soit en projetant sur l'axe Oz :

$$\Gamma = -BM\sin\theta.$$

Le théorème du moment cinétique donne donc :

$$J\ddot{\theta} = -MB\sin\theta,$$

soit pour des oscillations de faible amplitude une pulsation

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{BM}{J}}.}$$

2 - L'aiguille $\vec{m}$ est à l'équilibre, donc la somme des couples agissant sur elle est nulle.

On a d'une part celui exercé par le champ $\vec{B}$: $\Gamma = -mB\sin\theta = mB\sin|\theta|$ ($\theta < 0$ sur le schéma).

Et celui exercé par l'action de $\vec{M}$ donnée dans l'énoncé.

D'où :

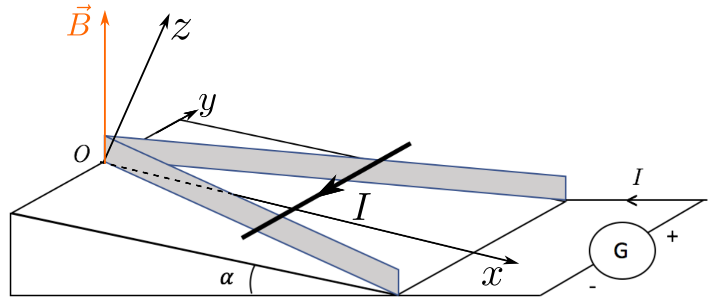
$$mB\sin|\theta| - \frac{\mu_0 mM}{2\pi r^3} = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{B\sin|\theta| = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}.}$$

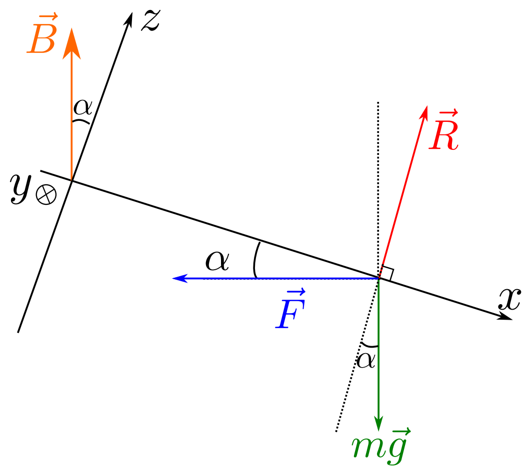
3 - Avec les résultats des deux étapes on peut éliminer le moment magnétique M inconnue, et obtenir :

$$\boxed{B = \omega_0\sqrt{\frac{\mu_0 J}{2\pi r^3\,\sin|\theta|}},}$$

d'où la mesure de B par des mesures mécaniques seulement.

III Rail de Laplace modifiés [• • ○]





1 - Le champ magnétique doit être vers le haut pour que $I\vec{L}\wedge\vec{B}$ soit dirigé vers le point O et fasse monter la tige.

2 - ⋆ Il faut d'abord exprimer $\vec{B}$ et $\vec{L}$ dans le repère $Oxyz$:

- $\vec{L} = -l(x)\,\vec{e}_y$.
- $\vec{B} = B\cos\alpha\,\vec{e}_z - B\sin\alpha\,\vec{e}_x$.

$$\text{On a donc} \quad \boxed{\vec{F} = I\vec{L}\wedge\vec{B} = -IlB(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z).}$$

Sur le schéma ceci donne un vecteur horizontal dirigé vers la gauche, donc vers le point O.

⋆ Ensuite, la longueur de la portion de la tige qui conduit le courant est $l(x)$ et dépend de la position x.

On voit que $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{l/2}{x}$, donc $\boxed{l = 2x\,\tan\frac{\beta}{2}.}$ D'où finalement :

$$\boxed{\vec{F} = -2IBx\tan\frac{\beta}{2}(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z).}$$

3 - À l'équilibre, la somme des trois forces s'exerçant sur la tige est nulle (poids, force de Laplace et réaction du rail) : $\vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$.

Comme on ne connaît par $\vec{R}$, on projette sur $\vec{e}_x$. $\vec{R}\cdot\vec{e}_x = 0$ car il n'y a pas de frottements.

Or $\vec{g} = -g\cos\alpha\,\vec{e}_z + g\sin\alpha\,\vec{e}_x$, donc sur $\vec{g}\cdot\vec{e}_x = g\sin\alpha$, et on obtient à l'équilibre :

$$-2IBx\tan\frac{\beta}{2}\cos\alpha + 0 + g\sin\alpha = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{x_{\text{éq}} = \frac{mg\tan\alpha}{2IB\tan(\beta/2)}.}$$