Partie VI : Mécanique
Chapitre 7

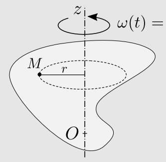
Introduction à la mécanique du solide

I Mouvement d'un solide (cinématique)

1 - Définition d'un solide
indéformable

2 - Mouvement de translation
l'orientation reste fixe
cas part.
- Translation rectiligne
- Translation circulaire

3 - Mouvement de rotation autour d'un axe fixe
a/ Définition
b/ Vitesse d'un point du solide
$\vec{v}(M) = r\omega\,\vec{e}_\theta$



II PFD pour un système (dynamique)

1 - Centre d'inertie d'un système
= barycentre des masses
ex. si 2 points : $(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$

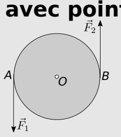
2 - Quantité de mouvement d'un système
$\vec{p} = m\vec{v}(G)$

3 - Théorème de la résultante dynamique pour un système
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i$$
résultantes des forces extérieures

III Solide en rotation : approche avec le théorème du moment cinétique

1 - Moment cinétique d'un solide
axe Δ fixe : $\sigma_\Delta = J_\Delta\omega = J_\Delta\dot{\theta}$

2 - Moment d'une action mécanique sur un solide
a/ Cas d'une force avec point d'application M : $\Gamma_{Oz} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$
b/ Couple
résultante nulle
moment C



c/ Liaison pivot
parfaite $\Rightarrow$ moment nul sur son axe

3 - Théorème du moment cinétique
- axe *Oz* fixe ET - réf. galiléen
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{0z}(\vec{F}_i)$$
moments et couples externes

4 - Application : le pendule pesant

IV Solide en rotation : approche avec le théorème de l'énergie cinétique

1 - Énergie cinétique d'un solide
axe Δ fixe : $E_c = \dfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$

2 - Puissance d'une action mécanique sur un solide
Force avec point d'application M : $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)$
Liaison pivot parfaite $\Rightarrow$ puissance nulle

3 - Théorème de l'énergie cinétique
- axe *Oz* fixe ET - réf. galiléen
$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

Ce qu'il faut connaître

(cours : I)

▶1 Quelle est la définition d'un solide (sous-entendu indéformable ou idéal) ?

(cours : II)

▶2 Quelle est la définition du centre d'inertie G d'un système de points ? (expliquer par une phrase)
Donner la relation mathématique dans le cas d'un système de deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2.

▶3 Comment est définie la quantité de mouvement d'un système de points M_1, ..., M_N ?
Comment s'exprime plus simplement cette quantité de mouvement du système, en fonction notamment de la vitesse de son centre d'inertie G ?

▶4 Comment s'énonce le théorème de la résultante dynamique pour un solide (ou pour un système fermé en général) ?

(cours : III)

▶5 Comment s'écrit le moment cinétique d'un solide par rapport à un axe Δ, étant donné sa vitesse angulaire et son moment d'inertie par rapport à cet axe ?

▶6 Comment est défini, lorsqu'il existe, le point d'application d'une force ?

▶7 Quelle est la définition d'un couple ?

▶8 Que peut-on dire lorsqu'une liaison pivot est supposée parfaite ? (en termes de moment et de puissance)

▶9 Comment s'énonce le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe ?

(cours : IV)

▶10 Comment s'écrit l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe, étant donné sa vitesse angulaire et son moment d'inertie par rapport à cet axe ?

▶11 Comment s'énonce le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe ?

Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I)

▶12 Pour un solide, savoir reconnaître un mouvement de translation (et les cas particuliers de translation rectiligne ou circulaire) ainsi qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

▶13 Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe, à la vitesse angulaire ω, M un point du solide et R la distance entre M et l'axe. Comment s'exprime la vitesse de M ?

——— (cours : II)

▶14 Dans le cas d'un système de deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2, démontrer que la quantité de mouvement du système s'écrit $\vec{p} = (m_1 + m_2)\vec{v}(G)$ avec G le centre d'inertie.

——— (cours : III)

▶15 Utiliser le théorème du moment cinétique pour étudier un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. → **EC1**,**EC2**

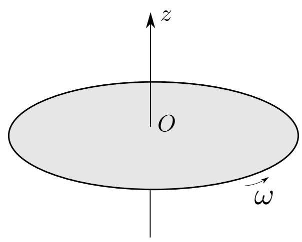
——— (cours : IV)

▶16 Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour étudier un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. → **EC3**

Exercices de cours

Exercice C1 – Application du TMC dans le cas d'un seul couple

On considère un disque en rotation autour d'un axe fixe Oz. La liaison pivot selon cet axe entraîne un couple de frottement noté C, proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ω : $C = -\alpha\omega$ avec α pris constant. On note J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz.



1 - Quel est le signe de α ?

2 - Appliquer le théorème du moment cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.

3 - La résoudre en supposant qu'on lance le disque avec une vitesse angulaire initiale ω_0.

Correction :

1 - Le couple de frottement est résistif. Si $\omega > 0$, alors le disque tourne dans le sens direct autour de l'axe, et le couple C doit donc être négatif pour empêcher cette rotation directe, donc il faut $C < 0$.

Conclusion : $\boxed{\alpha > 0.}$

2 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen.

⋆ Bilan des actions mécaniques : il n'y a que l'action de la liaison pivot, de couple C.

⋆ Moment cinétique par rapport à l'axe Oz : $\sigma_{Oz} = J\omega$.

⋆ Théorème du moment cinétique :

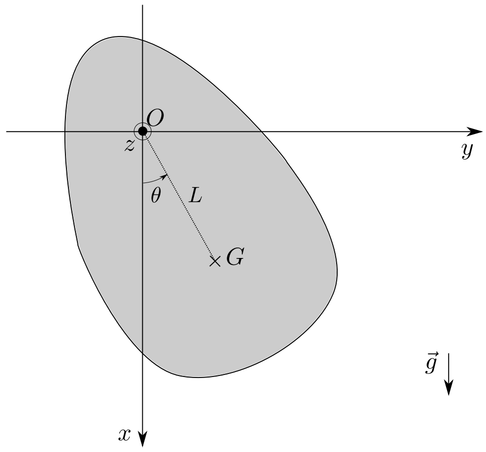
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = C, \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}J\omega}{\mathrm{d}t} = -\alpha\omega, \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{J}\omega(t).}$$

3 - Solution : $\omega(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{J}t}$ avec A constante d'intégration, que l'on détermine grâce à la CI $\omega(0) = \omega_0$, d'où $A = \omega_0$, et

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{J}t}.}$$

Exercice C2 – Pendule pesant, méthode avec le TMC

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz. La liaison pivot selon cet axe est supposée parfaite. G est le centre d'inertie du solide. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. On note J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz, et m_t sa masse totale.

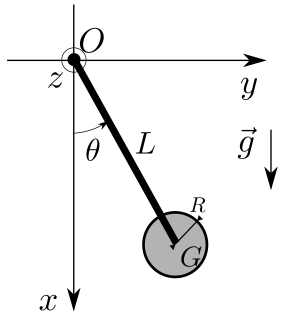


1 - Appliquer le théorème du moment cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.

2 - On se place dans l'approximation des oscillations de petite amplitude. Donner l'expression de la pulsation du mouvement.

On prend ensuite une forme particulière pour le pendule : une tige rigide de masse m maintient une masse en forme de disque de rayon R et masse M (cf second schéma). On donne le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe Oz :

$$J = \underbrace{\frac{1}{2}MR^2 + ML^2}_{\text{contribution masse M}} + \underbrace{\frac{1}{3}mL^2}_{\text{contribution tige}} .$$



On suppose que $m \ll M$, si bien que $J = \frac{1}{2}MR^2 + ML^2$ et que le centre d'inertie G de l'ensemble est bien au centre du disque.

3 - À quelle condition (en plus de $m \ll M$) retrouve-t-on l'expression de la pulsation d'un pendule *ponctuel* (masse M ponctuelle accrochée à un fil de masse nulle et de longueur L), à savoir, $\omega_{\text{ponctuel}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$?

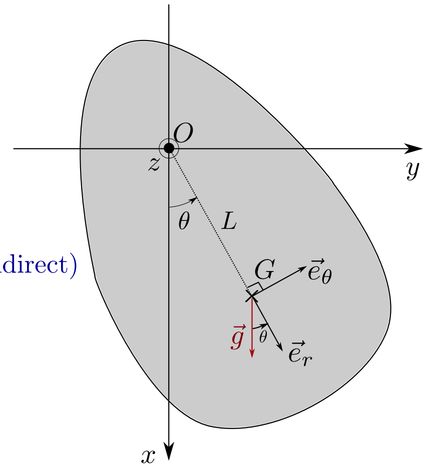
Correction :

1 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen.

⋆ Bilan des actions mécaniques :

– La liaison pivot, parfaite donc moment par rapport à l'axe Oz nul.

– La pesanteur, de moment par rapport à l'axe Oz donné par



$$\begin{aligned}\Gamma_{Oz} &= (\overrightarrow{OG} \wedge m_t\vec{g}) \cdot \vec{e}_z \\ &= (L\vec{e}_r \wedge m_t g\vec{e}_x) \cdot \vec{e}_z \\ &= (-Lm_t g \sin\theta\, \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z \quad \text{(signe moins car fait tourner dans le sens indirect)} \\ &= -Lm_t g \sin\theta\end{aligned}$$

⋆ Moment cinétique par rapport à l'axe Oz : $\sigma_{Oz} = J\dot{\theta}$.

⋆ Théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{Oz}, \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}J\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = -m_t Lg\sin\theta, \quad \text{donc} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{m_t Lg}{J}\sin\theta = 0.}$$

2 - Si $\theta \ll 1\,\text{rad}$, alors on a $\ddot{\theta} + \frac{m_t Lg}{J}\theta = 0$, équation de l'oscillateur harmonique où la pulsation est $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{m_t Lg}{J}}.}$

3 - Notre formule s'écrit donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{MLg}{\frac{1}{2}MR^2 + ML^2}} = \sqrt{\frac{Lg}{\frac{1}{2}R^2 + L^2}}$.

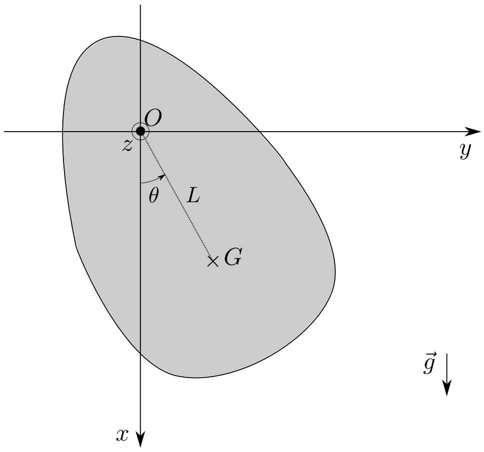
Ceci se simplifie si $\boxed{R \ll L,}$ car on a alors

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Lg}{L^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

ce qui est le même résultat que celui trouvé dans les chapitres précédents, où on avait supposé la masse M ponctuelle localisée en G.

Mais on voit que si la masse n'est pas d'extension petite devant L, ou que si la masse de la tige n'est pas négligeable devant la masse au bout, alors l'expression est différente.

Exercice C3 – Pendule pesant, méthode avec le TEC



On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz. La liaison pivot selon cet axe est supposée parfaite. G est le centre d'inertie du solide. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. On note J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz, m sa masse.

1 - Appliquer le théorème de l'énergie cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.

2 - On se place dans l'approximation des oscillations de petite amplitude. Donner l'expression de la pulsation du mouvement.

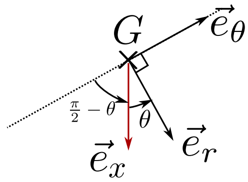
Correction :

1 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen.

⋆ Bilan des actions mécaniques :

– La liaison pivot, parfaite donc puissance nulle : $\mathcal{P}(\text{pivot}) = 0$.

– La pesanteur, de puissance :



$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = \cos\theta$$
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta = -\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(m\vec{g}) &= m\vec{g}\cdot\vec{v}(G)\\ &= mg\vec{e}_x\cdot L\dot{\theta}\vec{e}_\theta\\ &= -mgL\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{(cf schéma)}\end{aligned}$$

⋆ Énergie cinétique de rotation : $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$.

⋆ Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\text{pivot}), \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}J\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = -mgL\dot{\theta}\sin\theta.$$

Or $\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = 2\ddot{\theta}\dot{\theta}$, donc en simplifiant par $\dot{\theta}$ on obtient $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{m_t L g}{J}\sin\theta = 0.}$

2 - Si $\theta \ll 1\,\text{rad}$, alors on a $\ddot{\theta} + \dfrac{m_t L g}{J}\theta = 0$, équation de l'oscillateur harmonique où la pulsation est $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mLg}{J}}.}$

Cours

On dit qu'une tartine beurrée chutant d'une table tombera toujours avec le côté beurré au sol.

Comment mettre en équation un tel problème de physique ?

Avec les chapitres précédents nous ne pouvions pas, car nous nous sommes intéressés à la dynamique de points matériels. Modéliser la tartine par un point matériel et appliquer le PFD permet de connaître la trajectoire de son centre de masse, mais nous perdons toute information sur sa rotation de la tartine sur elle-même.

L'objectif du présent chapitre est donc d'étendre la mécanique à des *solides* (donc non ponctuels), et nous pourrons en particulier étudier les mouvements de rotation d'un solide sur lui-même.

Il s'agit d'une introduction, et vous voyez/verrez à ce sujet bien plus de choses en SII.

I – Mouvement d'un solide (cinématique)

1 – Définition d'un solide

On parle de "système" pour désigner un objet ou ensemble d'objets, auquel on peut appliquer les principes de la mécanique. Par exemple : une roue, une voiture, une balle, un lampadaire...

En général un système est déformable, par exemple s'il est constitué de plusieurs pièces mobiles, ou s'il est compressible.

Définition : solide

Un solide (sous-entendu : indéformable) est un système dont tous les points restent à distance constante les uns des autres.

Il s'agit d'un modèle idéal. C'est aux solides qu'on s'intéresse dans cette partie I.

2 – Mouvement de translation

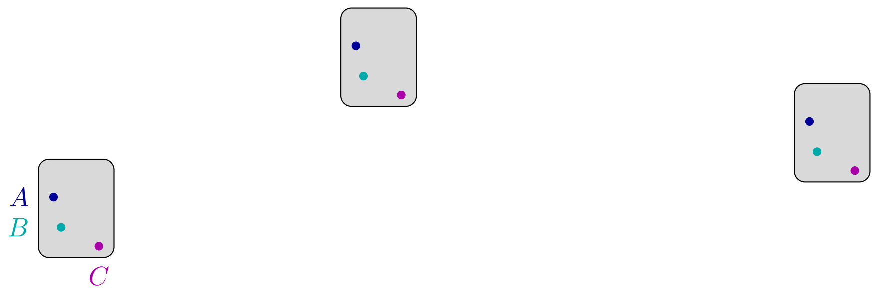
Définition : mouvement de translation

Un solide est en mouvement de **translation** si son orientation est fixe au cours du mouvement.

On peut formuler ceci de trois façons équivalentes :

- Pour tous points A et B du solide, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constant au cours du mouvement.
- Au cours du mouvement, les trajectoires de chacun de points du solide sont les mêmes mais décalées les unes par rapport aux autres.
- À chaque instant, quels que soient les points A et B du solide, $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$.

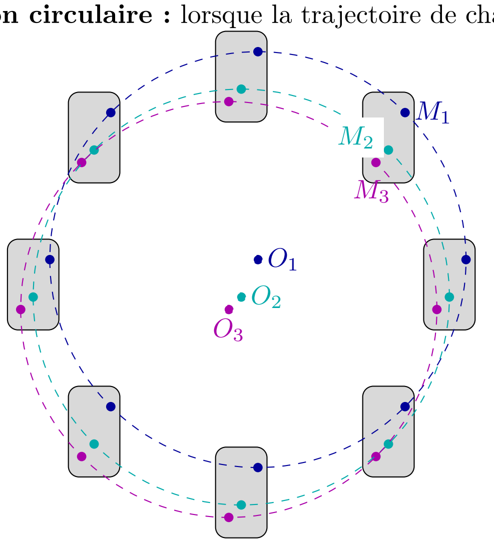
Remarque : la nature du mouvement dépend bien sûr du référentiel dans lequel il est décrit.

> **Exemple :** le solide ci-dessous suit un mouvement de translation.
>
> 
>

Deux cas particuliers de translations :

- **Translation rectiligne :** lorsque la trajectoire de chaque point du solide est une droite.

- **Translation circulaire :** lorsque la trajectoire de chaque point du solide est un arc de cercle.



Exemple : chaque nacelle est en translation circulaire.

Attention, c'est une translation donc le solide ne tourne pas sur lui-même : son orientation reste fixe.
De plus, les rayons des cercles sont les mêmes, mais pas les centres.

3 – Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

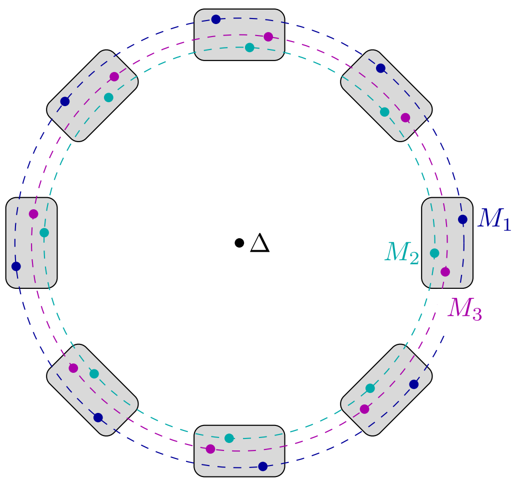
a/ Définition du mouvement

Définition : rotation autour d'un axe fixe

Soit Δ un axe fixe.

Un solide est en **rotation** autour de Δ si la trajectoire de chacun de ses points est un cercle dont le centre est sur l'axe.

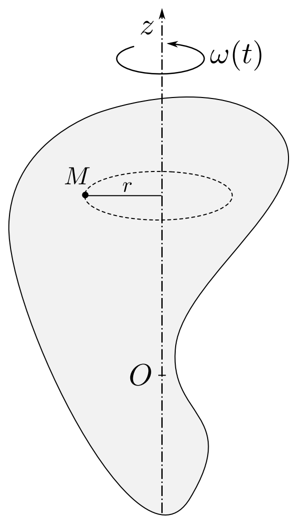
De façon équivalente : la distance entre un point du solide et l'axe Δ reste constante au cours du temps.



Exemple : l'ensemble du manège est en rotation autour de l'axe central.

Autre exemple : un pendule (cf schéma de l'**EC2**) est en rotation autour de son axe.

b/ Vecteur vitesse d'un point du solide



On peut utiliser un repère en coordonnées cylindriques d'axe Δ.
Soit un point M du solide, de coordonnées (r,θ,z).
$\rightarrow$ on appelle **vitesse angulaire** le paramètre $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}$ [rad/s].

Propriétés sur les vitesses d'un solide en rotation

Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe.

- La vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ ne dépend pas du point M considéré.
  On peut parler de LA vitesse angulaire du solide.
- Le vecteur vitesse d'un point M du solide est tangent au cercle décrit par M, de norme $R|\omega|$ avec R la distance à l'axe.

Démonstration :

- Point 1 : évident.
- Point 2 : $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.
  Or ici $r = R = \text{cst}$ et $z = \text{cst}$, donc on a $\vec{v}(M) = R\omega\vec{e}_\theta$, ce qui prouve ce qu'il faut.

II – PFD pour un système (dynamique)

Dans cette partie II, on considère un système, qui peut être un solide ou non (donc qui peut être déformable).

1 – Centre d'inertie d'un système

Définition du centre d'inertie d'un système

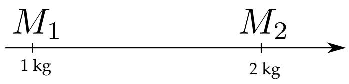
Le centre d'inertie (ou centre de masse) d'un système, noté G, est le barycentre des masses du système.

Exemples (seule la formule encadrée dans le cas de deux points est à connaître) :

- Dans le cas de deux masses m_1 et m_2 situées en M_1 et M_2, le centre d'inertie vérifie

$$\boxed{(m_1+m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2},}$$

où O est l'origine du repère que l'on place où cela nous arrange.

> **Exemple :** On considère une masse $m_1 = 1\,\text{kg}$ en M_1 et une masse $m_2 = 2\,\text{kg}$ en M_2.
> $\rightsquigarrow_1$ Trouver la position de G.
> (indication : placer le point O où cela nous arrange, en M_1 par exemple, puis utiliser la relation ci-dessus)
>
> 
>
>
> **Réponse :** On place O au point M_1.
> Par définition on a $(m_1+m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$.
> Or ici $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$, donc on a $\overrightarrow{OG} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{OM_2} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM_2}$, donc G est à deux tiers du segment $[M_1M_2]$.

Remarque : Le barycentre vérifie aussi $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$.
Cette relation, et celle encadrée ci-dessus, sont les deux façons de définir un barycentre. On passe de cette dernière à celle encadrée en introduisant le point O et en utilisant Chasles : $m_1(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM_1}) + m_2(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM_2}) = \vec{0}$, etc...

- Dans le cas de N masses m_1, ..., m_N, situées en M_1, ..., M_N,
On pose $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$. On note O l'origine fixe du repère.
Le centre d'inertie est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}}\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}$$

- Dans le cas d'un solide, il faut le découper en petits morceaux, chacun centré sur un point M et de masse infinitésimale dm. On remplace alors la somme ci-dessus par une intégrale :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}}\int_{M\in\text{solide}} \mathrm{d}m\,\overrightarrow{OM}.$$

2 – Quantité de mouvement d'un système

Rappel : La quantité de mouvement <u>d'un</u> point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)$ est : $\vec{p} = m\vec{v}(M)$.

Quantité de mouvement d'un système

Définition : La quantité de mouvement d'un système est la somme des quantités de mouvement de tous ses points.

Propriété : cette quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{p} = m\vec{v}(G),$$

avec m la masse totale du système, et $\vec{v}(G)$ la vitesse du centre d'inertie du système.

Ainsi pour la quantité de mouvement, tout se passe comme si toute la masse du système était concentrée au point G, avec une vitesse $\vec{v}(G)$.

Démonstration dans le cas d'un système de deux points matériels :

On démontre ce résultat dans le cas particulier de deux points. Notons $m = m_1 + m_2$ la masse totale, et $\vec{p}$ la quantité de mouvement totale (donc la somme de $m_1\vec{v}_1$ et de $m_2\vec{v}_2$). On a :

$$\vec{p} = m_1\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t} \ = \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}_{=(m_1+m_2)\overrightarrow{OG}}\right)$$

$$= (m_1+m_2)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} \ = \ m\vec{v}(G).$$

La démonstration pour un système quelconque de N points est similaire, mais nous ne la menons pas.

3 – Théorème de la résultante dynamique pour un système

(aussi appelé loi de la quantité de mouvement, théorème de la résultante cinétique, théorème du centre d'inertie, PFD pour un système, etc...)

Théorème de la résultante dynamique pour un système

Soit un système (déformable ou solide). On note G son centre d'inertie, m sa masse totale, et $\sum_i \vec{F}_i$ la somme des résultantes des forces *extérieures* au système qui s'appliquent sur lui.
On a :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Attention, seules les forces extérieures interviennent. Les forces internes au système (qu'une partie du système exerce sur une autre partie du système) n'interviennent pas.

Remarques :

- Nous admettons ce théorème. La démonstration n'est cependant pas très compliquée : il faut appliquer le PFD à chaque point du système, et sommer tous ces PFD. Les forces internes se simplifient à cause du principe des actions réciproques, et on a le résultat.
- Sous la forme $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i$ (équivalente puisque $\vec{p} = m\vec{v}(G)$), ce théorème est appelé loi de la quantité de mouvement, ou théorème de la résultante cinétique. Il est alors valable que m soit constant ou non.

  Sous la forme $m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i$, ou encore $m\,\vec{a}(G) = \sum_i \vec{F}_i$, on l'appelle plutôt théorème du centre d'inertie ou théorème de la résultante dynamique. Il faut $m = \text{cst}$ pour l'obtenir (ce qui est toujours le cas en CPGE).

Remarque : Ainsi pour le PFD, tout se passe comme si on avait un point matériel G de masse m.
Le centre d'inertie G est donc le point où est concentrée toute la masse du système pour ce qui concerne le PFD.
C'est aussi en ce point que s'applique la résultante du poids, d'où son autre nom : centre de masse.

Exemple : Étudions la trajectoire d'un ballon de masse m.

- Première option, suivie dans les chapitres précédents : le modéliser comme un point matériel G de masse m.

  Le PFD s'écrit alors $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \sum\vec{F}$
- Deuxième option : le ballon est un solide, de centre de masse G. Le PFD s'écrit alors $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \sum\vec{F}$.

C'est donc équivalent ! Ceci justifie ce que nous avions fait jusque là.

Remarquons tout de même que la deuxième approche est plus riche, car elle permet d'étudier la rotation du ballon sur lui-même.
Mais dans tout les cas où la rotation du solide n'est pas intéressante, il est possible de le modéliser par un unique point.

Les parties suivantes s'intéressent à la rotation d'un solide.

III – Solide en rotation : approche avec le théorème du moment cinétique

Dans cette partie III, on considère un solide, en rotation autour d'un axe fixe.

> **Rappel :** Pour un point matériel de masse m et vitesse $\vec{v}$, le moment cinétique par rapport à un axe Oz fixe s'écrit $\sigma_{Oz} = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_z$, le moment d'une force $\vec{F}$ s'écrit $\Gamma_{Oz}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$, et le théorème du moment cinétique s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_i)$.
>
> Voyons comment ceci se généralise à un solide en rotation.

1 – Moment cinétique d'un solide

Moment cinétique

Soit un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe Δ à la vitesse angulaire ω.

Son moment cinétique par rapport à Δ s'écrit $\boxed{\sigma_\Delta = J_\Delta \omega,}$
avec J_Δ le <u>moment d'inertie</u> du solide par rapport à l'axe Δ (unité S.I. : $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$).

> **Démonstration** (n'est pas à savoir refaire) :
>
> Prenons $\Delta = Oz$ (orienté par $\vec{e}_z$).
>
> Pour obtenir le moment cinétique du solide, on le découpe en morceaux centrés sur des points M_i, chacun de masse m_i, et on considère chaque morceau comme une masse ponctuelle.
>
> On prend des coordonnées cylindriques d'axe Oz, et on note r_i la distance entre M_i et l'axe Oz.
> Comme le solide est en rotation autour de l'axe, $r_i = \text{cst}$ et $\vec{v}(M_i) = r_i\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, avec $\dot{\theta}$ identique pour tous les points.
>
> Le moment cinétique de la masse M_i par rapport à cet axe est
>
> $$\sigma_{Oz}(M_i) \;=\; (\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v}(M_i)) \cdot \vec{e}_z \;=\; (r_i\vec{e}_r \wedge m_i r_i\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z \;=\; m_i r_i^2\,\dot{\theta}.$$
>
> Pour avoir le moment cinétique du solide, on somme alors tous les moments cinétiques :
>
> $$\sigma_{Oz} = \sum_i \sigma_{Oz}(M_i) \;=\; \sum_i m_i r_i^2\,\dot{\theta} \;=\; \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\dot{\theta} \;=\; J_{Oz}\dot{\theta} \quad \text{avec} \quad J_{Oz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right).$$

À propos du moment d'inertie

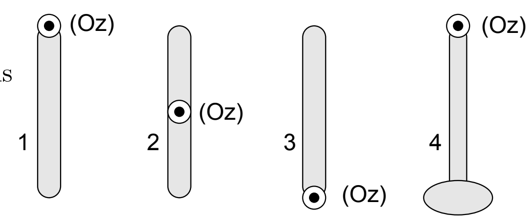
On a obtenu dans la démonstration ci-dessus l'expression du moment d'inertie J_{Oz}.

- Il dépend de l'axe par rapport auquel il est défini.
- Ce moment rend compte de la répartition de la masse du solide autour de l'axe, et de la difficulté à mettre en rotation le solide (ou à arrêter sa rotation).

  On voit sur la formule que plus la masse est répartie loin de l'axe, plus il est important (termes en r_i^2).

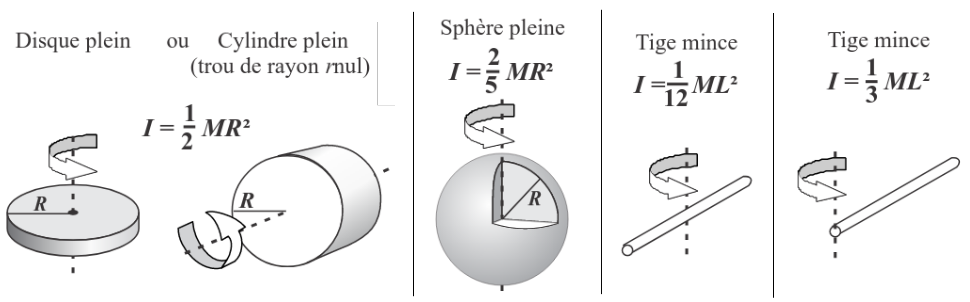
Ci-contre exemples de solides avec des moments d'inertie plus ou moins importants.

Par rapport à l'axe Oz, on a : $J_2 < J_1 = J_3 < J_4$.



Ci-contre exemples de moment d'inertie pour des formes simples (pas à connaître).

(La masse volumique de ces solides est supposée uniforme.)



Remarque : Dans un énoncé, l'expression du moment d'inertie est toujours donnée. En SII, vous voyez comment le calculer par combinaison de moments pour des formes simples. Pour une forme quelconque, ou une masse volumique non uniforme, il faut utiliser la formule vue ci-dessus, en remplaçant la somme par une intégrale.
Enfin, le théorème de Huygens (qui n'est pas au programme de physique) permet d'obtenir le moment d'inertie par rapport à un axe Δ parallèle et à une distance d d'un axe passant par le centre d'inertie : $J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2$ (m masse de l'objet).

2 – Moment d'une action mécanique sur un solide

La notion de force est pertinente pour un point matériel M. Il n'y a pas d'ambiguïté : la force $\vec{F}$ s'applique sur le point M. Puis on peut calculer son moment en un point A : $\vec{\Gamma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$.

Les choses sont plus compliquées pour un système ou un solide. On parle plutôt d'**action mécanique**. Par exemple l'action de la pesanteur sur le solide, ou une action de contact (forces de pression, action d'un ressort attaché sur le solide, d'une liaison pivot, de contact sur un plan, etc...).

Une action mécanique est caractérisée par un torseur, défini en un point A quelconque par sa résultante $\vec{F}$ (indépendante du point A) et son moment $\vec{\Gamma}_A$ en A.

a/ Moment d'une force avec point d'application

Le **point d'application** de l'action mécanique est le point M où le moment s'annule. Un tel point n'existe pas toujours (et si il existe, alors le professeur de SII appellera ce torseur un "glisseur").

Moment d'une force avec point d'application

Soit $\vec{F}$ une résultante de force, et M son point d'application (on suppose qu'il existe et est connu).

Son moment par rapport à un axe Oz, orienté par $\vec{e}_z$, est $\Gamma_{Oz}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$.

On a donc finalement les mêmes formules que pour un point matériel.

Remarque : Ceci vaut pour une action qui possède un point d'application (où le moment s'annule). Dans le cours physique, ce point d'application est toujours évident :

- Le point d'application de l'action de la pesanteur est le centre d'inertie, ou centre de masse, G.
- Le point d'application d'une force s'exerçant en un point du solide est ce point.
  Par exemple si un ressort est attaché en un point A du solide, le point d'application de l'action du ressort sur le solide est A.

Un exemple d'action mécanique qui ne possède pas de point d'application est un couple.

b/ Couple

Couple

Définition : Un couple est un cas particulier d'action mécanique pour laquelle la résultante est nulle.

Propriété : Le moment d'un couple ne dépend pas du point où il est calculé. $\forall\ A$, $\vec{\Gamma}_A = \vec{\Gamma}_O$.

On le note en général $\vec{C}$ sans préciser le point de référence, et C si c'est le moment par rapport à un axe.

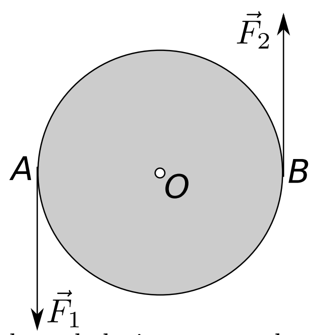
C'est un cas d'action très important, car il permet de mettre en rotation un objet sans le déplacer dans son ensemble (d'après le théorème de la résultante dynamique, $m\vec{a}(G) = \vec{0}$).

Exemple :

On tourne un volant en exerçant avec chaque main une force égale (mais opposée) en A et en B.

La somme des forces est nulle, mais ceci entraîne tout de même une rotation du volant.

On peut calculer ce couple : c'est la somme des deux moments selon l'axe Oz, avec la méthode du bras de levier (en notant $F = \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$) :



$$C = \Gamma_{Oz}(\vec{F}_1) + \Gamma_{Oz}(\vec{F}_2) = AO \times F + OB \times F = AB \times F.$$

On constate que le couple est d'autant plus important que la force est grande et que le bras de levier est grand.

On parle de “couple” à cause de l’exemple ci-dessus : car il est créé par un couple de deux forces.
Cependant ce n’est pas la seule possibilité : un moteur produit un couple sur son axe, un frein produit également un couple, etc.

c/ Cas particulier d’une liaison pivot

Liaison pivot

Définition : une liaison pivot d’axe Δ ne permet qu’un seul degré de liberté : une rotation autour de Δ.

Propriétés : – La résultante $\vec{F}$ associée à cette liaison n’est en général pas nulle.
Concernant le moment scalaire selon l’axe Δ, Γ_Δ :

- S’il y a des frottements, il n’est pas nul. On peut parler de couple de frottements, qui résiste au mouvement.
- Si la liaison pivot est **parfaite**, alors $\Gamma_\Delta = 0$.

3 – Théorème du moment cinétique

Le TMC pour un solide ou pour un point s’énonce de la même façon :

Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation (axe fixe)

On se place dans un référentiel galiléen.

Soit Oz un axe *fixe* dans ce référentiel, autour duquel tourne le solide.

Soit $\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$ le moment cinétique de ce solide par rapport à Oz, et $\Gamma_{Oz}(\vec{F_i})$ les moments des forces appliquées au solide.

$$\text{On a : } \quad \frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F_i}).$$

S’il y a un couple C qui intervient, il est à considérer comme un moment : on a $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = C + ...$

La différence avec le cas d’un point est donc dans l’expression de σ_{Oz} : il faut utiliser l’expression $\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$.

Ce théorème est admis. Il se démontre en découpant le solide en masses m_i centrées sur des points M_i, puis en appliquant le théorème du moment cinétique à chaque point et en les sommant tous.
En particulier, on constate que les moments des forces internes se simplifient et disparaissent.

$\rightsquigarrow_2$ Faire l’**EC1** (avec la vidéo).

4 – Application : le pendule pesant

Jusqu’ici nous avons étudié le pendule *simple* : toute la masse était concentrée en un point M, situé à une distance l du point de pivot.

On appelle pendule *pesant* un modèle où on prend en compte le fait que la masse n’est en fait pas ponctuelle. Avec nos nouveaux outils, nous pouvons traiter ce cas.

$\rightsquigarrow_3$ Faire l’**EC2** (avec la vidéo).

IV – Solide en rotation : approche avec le théorème de l'énergie cinétique

Dans cette partie IV, on considère un solide, en rotation autour d'un axe fixe.

> **Rappel :** Pour un point matériel de masse m et vitesse $\vec{v}$, l'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, la puissance d'une force $\vec{F}_i$ s'écrit $\mathcal{P}(\vec{F}_i) = \vec{F}_i \cdot \vec{v}$, et le théorème du moment cinétique s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$.
>
> Voyons comment ceci se généralise à un solide en rotation.

1 – Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Énergie cinétique

Soit un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe Δ à la vitesse angulaire ω.

Son énergie cinétique s'écrit $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2,}$
avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ (unité S.I. : $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$).

> **Démonstration** (n'est pas à savoir refaire) :
>
> L'idée est similaire à la démonstration de la relation $\sigma_\Delta = J_\Delta\omega$. Il faut découper le solide en morceaux de masse m_i centrés en M_i, et essayer de simplifier la somme
>
> $$E_c = \sum_i \frac{1}{2}m_i v(M_i)^2 \quad \text{avec} \quad |v(M_i)| = |r_i\omega|.$$
>
> On voit alors qu'on peut sortir le $\frac{1}{2}$ et le ω de la somme, et qu'on a bien le résultat.

2 – Puissance d'une action mécanique sur un solide

Tout comme pour le moment d'une action mécanique, la puissance associée est en général complexe à exprimer. Seuls les cas simples suivants sont à retenir :

Puissance d'une action mécanique

Soit une action mécanique de résultante $\vec{F}$ et de moment $\vec{\Gamma}_M$.

- Si l'action mécanique possède un point d'application A, alors sa puissance s'écrit $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(A)$.
  Exemple : La puissance du poids s'écrit $\mathcal{P} = m\vec{g} \cdot \vec{v}(G)$.
- La puissance associée à l'action mécanique d'une liaison pivot *parfaite* est nulle.

Remarque : Cas d'une liaison pivot qui exerce un couple de frottements ou moteur C : $\mathcal{P} = C\omega$.

On peut aussi utiliser l'énergie potentielle, par exemple

- Énergie potentielle de pesanteur : $E_p = mgz_G$ avec z_G altitude du centre d'inertie (axe z vers le haut).
- Énergie potentielle associée à un ressort : $E_p = \dfrac{1}{2}k(l - l_0)^2$.
- Énergie potentielle associée à un ressort spirale : $E_p = \dfrac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2$ (expression pas à connaître).

3 – Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation (axe fixe)

On se place dans un référentiel galiléen.

Soit Oz un axe *fixe* dans ce référentiel, autour duquel tourne le solide.

Soit $E_c = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2$ l'énergie cinétique de rotation de ce solide par rapport à Oz.

Soit $\vec{F}_i$ les forces appliquées au solide.

$$\text{On a} \quad : \quad \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i).$$

La différence avec le cas d'un point est donc dans l'expression de E_c : il faut utiliser l'expression $E_c = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2$.

Ce théorème est admis. Comme d'habitude, il se démontre en découpant le solide en masses m_i centrées sur des points M_i, puis en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chaque point et en les sommant tous. La puissance des forces intérieures ne disparaît pas pour un système déformable : elle reste dans le théorème de l'énergie cinétique. Mais elle est nulle pour un solide indéformable.

> **Remarque : équivalence du théorème de l'énergie cinétique et du théorème de l'énergie cinétique**
>
> Notons M_i le point d'application de la force $\vec{F}_i$, et R_i la distance entre l'axe et M_i. La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du point M_i ne dépend pas du point (c'est la même pour tout le solide). On a :
>
> $$\begin{aligned} \text{TEC} \ : \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2\right) &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i) \\ \Leftrightarrow J_{Oz} \ddot{\theta} \dot{\theta} &= \sum_i \vec{F}_i \cdot R_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \Leftrightarrow J_{Oz} \ddot{\theta} &= \sum_i \vec{F}_i \cdot R_i \vec{e}_\theta . \end{aligned}$$
>
> On reconnaît à gauche la dérivée du moment cinétique.
>
> Quant au terme de droite, il faut écrire que $\Gamma_{Oz}(\vec{F}_i) = (R_i \vec{e}_r \wedge \vec{F}_i) \cdot \vec{e}_z = (\vec{e}_z \wedge R_i \vec{e}_r) \cdot \vec{F}_i = R_i \vec{e}_\theta \cdot \vec{F}_i$.
>
> On retrouve donc exactement le théorème du moment cinétique.
>
> **Bilan :** TMC et TEC sont équivalents pour un solide en rotation. Dans un problème, il est inutile d'appliquer les deux. Il faut choisir celui que l'on préfère.

$\rightsquigarrow_4$ Faire l'**EC3** (avec la vidéo).

Autres théorèmes énergétiques

On a aussi, comme en mécanique du point :

- La version intégrale du théorème de l'énergie cinétique : entre un point A et un point B,

$$\Delta E_c = \underbrace{\sum_i W_{A \to B}(\vec{F}_i)}_{\text{forces non conservatives}}$$

avec $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$.

- Le théorème de l'énergie mécanique, entre un point A et un point B :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \underbrace{\sum_i W_{A \to B}(\vec{F}_i)}_{\text{forces non conservatives}} .$$