**Mécanique**
**Chapitre 7**

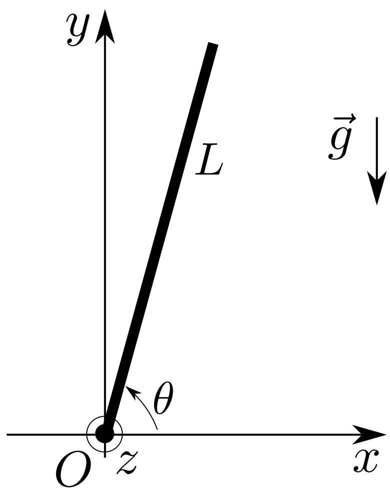
# TD – Introduction à la mécanique du solide

**Remarque :** exercice avec $\star$ : exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire")| [• ○ ○] : difficulté des exercices

## I Chute d'un arbre [• • ○]

On étudie la chute d'un arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.

On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10\,\text{m}$ et de masse $m$, reliée au sol par une liaison pivot parfaite, et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 0{,}9 \times \dfrac{\pi}{2}$. On donne le moment d'inertie par rapport à $Oz$ : $J = \dfrac{1}{3}mL^2$.




**1 -** Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre.

**2 -** Justifier pourquoi $E_c + E_p$ est constante au cours du mouvement.

Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.

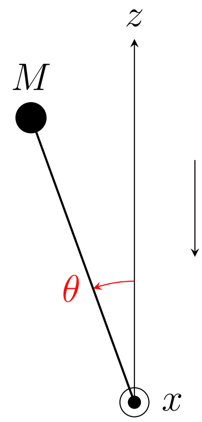
**3 -** En déduire la relation $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}}\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}$.

**4 -** Pour exprimer la durée $T$ de la chute, isoler $\mathrm{d}t$ dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta(0)$ et $\theta = \theta(\text{final})$. Puis faire l'A.N.

On donne le résultat numérique : $\displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} = 4{,}315$ pour $\theta_0 = 0{,}9 \times \dfrac{\pi}{2}$.

## II Gravimètre à ressort spirale [• ○ ○]

Instrument ancien, un gravimètre de Holweck–Lejay est constitué d'une tige de longueur $L$, libre de tourner autour d'un axe $Ox$, au bout de laquelle est placée en $M$ une masse $m$.
On note $J_{Ox}$ le moment d'inertie par rapport à l'axe $Ox$ de l'ensemble {tige+masse}, et on donne $J_{Ox} = mL^2$ (on a négligé la masse de la tige et on suppose ponctuelle la masse située au bout). La liaison pivot en $O$ est supposée parfaite.




Par ailleurs, un ressort spirale, non représenté sur le dessin, tend à retenir la tige en position verticale en exerçant sur la tige un couple (c'est-à-dire un moment résultant, par rapport à l'axe $Ox$) $\mathcal{M}_x = -C\theta$ autour de l'axe de rotation, avec $C > 0$ la constante de raideur du ressort. On admet que ce couple dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}C\theta^2$.

**1 -** En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation du mouvement du pendule portant sur l'angle $\theta$.

**2 - a -** Montrer que les positions d'équilibre $\theta_{\text{éq}}$ de la tige sont solution de l'équation

$$\sin\theta_{\text{éq}} = \frac{C}{mgL}\theta_{\text{éq}}.$$

**b -** Puis justifier qu'il existe trois positions d'équilibre si $C/mgL < 1$ et une seule sinon (on pourra raisonner graphiquement, en traçant $y = \sin\theta$ et $y = \frac{C}{mgL}\theta$).

**3 -** On souhaite étudier la stabilité de la position d'équilibre en $\theta = 0$.

**a -** Pour cela, donner l'expression de l'énergie potentielle totale du système {masse+tige+ressort} en fonction de l'angle $\theta$.

**b -** Puis démontrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ n'est stable que si $C/mgL > 1$.

**4 -** Intuitivement, que peut-on dire de la stabilité des positions d'équilibre en $\theta \neq 0$ dans le cas où $C/mgL < 1$ ?

**5 -** Supposons que la raideur du ressort spirale soit telle que $C/mgL > 1$, et que les conditions initiales garantissent un mouvement de faible amplitude.

Déterminer la période des oscillations en termes de $g_0 = C/mL$ et expliquer l'utilisation de l'appareil en gravimètre, c'est-à-dire comme appareil de mesure des variations de $g$.

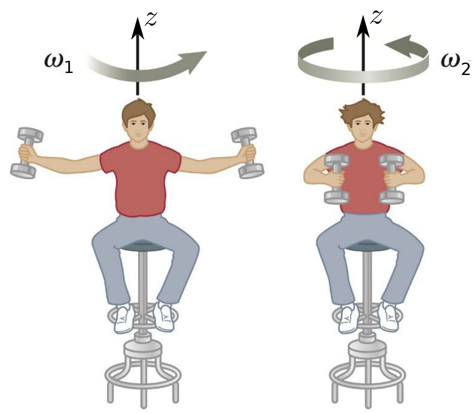
# III Tabouret d'inertie [• ○ ○]

Cf un exemple en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=pI2Y8h_Jnyg

Une personne est en rotation sur un tabouret tournant. Il porte un poids dans chaque main.

– Initialement, ses bras sont écartés du corps. Sa vitesse angulaire $\omega_1$ est faible.

– Puis il rapproche ses bras du corps : sa vitesse angulaire augmente. Sa vitesse finale $\omega_2$ est grande.



Ce type de situation se retrouve dans d'autres contextes : accélération angulaire d'un patineur quand il rapproche ses bras et jambes de son corps, effondrement d'une étoile (cf exercice étoile à neutrons), etc.

### Interprétation en termes de moment cinétique

On note $J_1$ le moment d'inertie "bras écarté", et $J_2$ celui "bras contre le corps".

**1 -** Justifier que le moment cinétique par rapport à l'axe $z$ du système {tabouret+personne+poi est constant tout au long de l'expérience.

**2 -** Expliquer alors pourquoi la vitesse angulaire augmente lorsqu'on rapproche les bras.

**3 -** Prenons par exemple $J_1 = 15\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, $J_2 = 5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, et une vitesse initiale $\omega_1 = 1{,}0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. En déduire la valeur de $\omega_2$.

### Interprétation avec un bilan d'énergie

**4 -** Montrer que l'énergie cinétique du système {tabouret+personne+poids} n'est pas conservée, mais augmente. D'où vient ce surplus d'énergie ?

**5 -** Calculer le travail fourni par la personne entre les états initiaux et finaux.

## IV Rotation d'une étoile à neutrons [• ○ ○]

Un pulsar est une étoile à neutrons tournant rapidement sur elle-même (période de l'ordre de la seconde) et émettant des rayonnements électromagnétiques importants.

Une étoile à neutron se forme lorsqu'une étoile arrive en fin de vie : n'ayant plus de combustible nucléaire à brûler, elle ne produit plus de chaleur et s'effondre sous l'effet de son propre poids.

Si elle est assez massive, l'effondrement de son noyau ne s'arrête brutalement que lorsque sa matière s'est entièrement transformée en neutrons (si elle est encore plus massive, c'est un trou noir qui se forme). Ceci produit une onde de choc, une production de neutrinos, et ces deux effets entraînent un rebond des couches externes : c'est l'explosion en supernova.

Le pulsar du Crabe est situé au centre de la nébuleuse du Crabe. Il est ce qu'il reste d'une étoile ayant explosé en supernova en l'an 1054. Sa période de rotation est de 33 ms.

Mais le noyau de l'étoile, transformé en soupe de neutrons, reste en place. S'il tourne rapidement sur lui-même, c'est un pulsar. C'est l'explication de cette rotation qui nous intéresse ici.

Pour cela, on modélise le noyau de l'étoile comme une boule homogène de moment d'inertie par rapport à son centre $J_1 = \frac{2}{5} m R_1^2$. Ce noyau tourne sur lui même, avec une période $T_1$. On peut prendre $R_1 = 100\,000\,\text{km}$ et $T_1 = 30\,\text{jours}$, ordres de grandeur possibles pour le noyau de certaines étoiles.

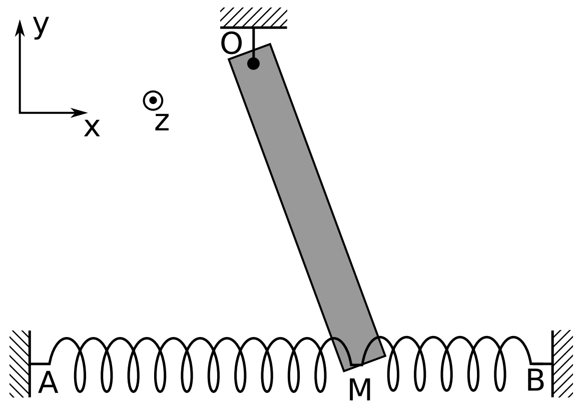
Ce noyau s'effondre, pour donner une étoile à neutrons de rayon $R_2 = 10\,\text{km}$ (cas par exemple du pulsar du Crabe ci-contre) et de période $T_2$ à déterminer.

On suppose que le noyau n'interagit avec rien lors de son effondrement : c'est un système isolé.

**1 -** Déterminer la période de rotation de l'étoile à neutrons.

## V Pendule relié à deux ressorts [● ● ○]

On considère un pendule pesant constitué par une tige homogène, de masse $m$, longueur $L$, et moment d'inertie par rapport à l'axe $Oz$ donné par $J_{Oz} = \frac{1}{3} m L^2$.
Son extrémité en $M$ est attachée à deux ressorts identiques, de raideur $k$ et longueur à vide $l_0$. Ils sont fixés à des points $A$ et $B$, la longueur $AB$ étant égale à $2l_0$, si bien qu'à l'équilibre le point $M$ est au milieu du segment $AB$.
On fera l'hypothèse des faibles angles et on supposera que les ressorts restent toujours horizontaux.
On définit $\theta$ comme l'angle entre la verticale descendante et la tige.




**1 -** Donner l'expression du moment cinétique de la tige projeté sur l'axe $Oz$, en fonction de $J_{0z}$ et de $\dot{\theta}$.

Énoncer ensuite le théorème du moment cinétique.

**2 -** Utiliser la question précédente pour établir l'équation du mouvement.

Puis la résoudre et donner l'expression de la pulsation $\omega_0$ des oscillations. On fera l'approximation des petits angles.

Indications pour 2/ : Donner l'expression des forces (attention aux signes pour les ressorts : voir pour cela dans quel sens cela doit tirer en prenant l'exemple du schéma de l'énoncé), puis des moments, puis appliquer le théorème du moment cinétique.