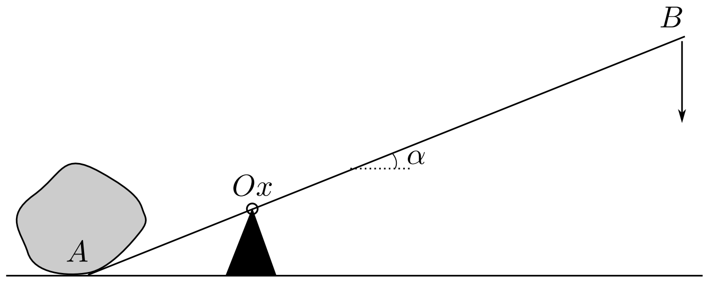
Partie VI : Mécanique
Chapitre 7

TD – Introduction à la mécanique du solide

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu'il faut savoir faire”)| [• ∘ ∘] : difficulté des exercices

I Principe du levier [• ∘ ∘]

Archimède (250 av. J.-C.) est le premier à établir la théorie physique du levier et de la balance. Il aurait dit : “Donnez-moi un point fixe et un levier, et je soulèverai la Terre.”



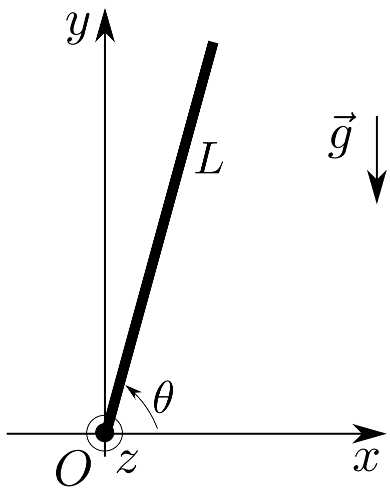
Prenons une situation plus modeste, comme ci-contre où $AO = 50\,\text{cm}$ et $OB = 1{,}5\,\text{m}$.

Quelle doit être la masse m d'Archimède s'il veut se suspendre au levier pour soulever un rocher de masse $M = 300\,\text{kg}$?

Pour répondre, on calculera le moment selon Ox de chacune des forces, et on justifiera pourquoi le levier tourne lorsque le moment exercé par Archimède dépasse (en valeur absolue) celui du rocher.

II Chute d'un arbre [• • ∘]

On étudie la chute d'un arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.



On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10\,\text{m}$ et de masse m, reliée au sol par une liaison pivot parfaite, et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 0{,}9 \times \dfrac{\pi}{2}$. On donne le moment d'inertie par rapport à Oz : $J = \dfrac{1}{3}mL^2$.

1 - Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre.

2 - Justifier pourquoi $E_c + E_p$ est constante au cours du mouvement.

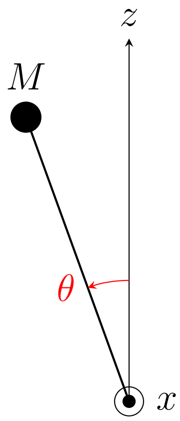
Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.

3 - En déduire la relation $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}}\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}$.

4 - Pour exprimer la durée T de la chute, isoler $\mathrm{d}t$ dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta(0)$ et $\theta = \theta(\text{final})$. Puis faire l'A.N.

On donne le résultat numérique : $\displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} = 4{,}315$ pour $\theta_0 = 0{,}9 \times \dfrac{\pi}{2}$.

III Gravimètre à ressort spirale [● ○ ○]



Instrument ancien, un gravimètre de Holweck–Lejay est constitué d'une tige de longueur L, libre de tourner autour d'un axe Ox, au bout de laquelle est placée en M une masse m.
On note J_{Ox} le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox de l'ensemble {tige+masse}, et on donne $J_{Ox} = mL^2$ (on a négligé la masse de la tige et on suppose ponctuelle la masse située au bout).
La liaison pivot en O est supposée parfaite.

Par ailleurs, un ressort spirale, non représenté sur le dessin, tend à retenir la tige en position verticale en exerçant sur la tige un couple (c'est-à-dire un moment résultant, par rapport à l'axe Ox) $\mathcal{M}_x = -C\theta$ autour de l'axe de rotation, avec $C > 0$ la constante de raideur du ressort. On admet que ce couple dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}C\theta^2$.

1 - En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation du mouvement du pendule portant sur l'angle θ.

2 - a - Montrer que les positions d'équilibre $\theta_{\text{éq}}$ de la tige sont solution de l'équation

$$\sin\theta_{\text{éq}} = \frac{C}{mgL}\theta_{\text{éq}}.$$

b - Puis justifier qu'il existe trois positions d'équilibre si $C/mgL < 1$ et une seule sinon (on pourra raisonner graphiquement, en traçant $y = \sin\theta$ et $y = \frac{C}{mgL}\theta$).

3 - On souhaite étudier la stabilité de la position d'équilibre en $\theta = 0$.

a - Pour cela, donner l'expression de l'énergie potentielle totale du système {masse+tige+ressort} en fonction de l'angle θ.

b - Puis démontrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ n'est stable que si $C/mgL > 1$.

4 - Intuitivement, que peut-on dire de la stabilité des positions d'équilibre en $\theta \neq 0$ dans le cas où $C/mgL < 1$?

5 - Supposons que la raideur du ressort spirale soit telle que $C/mgL > 1$, et que les conditions initiales garantissent un mouvement de faible amplitude.

Déterminer la période des oscillations en termes de $g_0 = C/mL$ et expliquer l'utilisation de l'appareil en gravimètre, c'est-à-dire comme appareil de mesure des variations de g.

IV Rotation d'une étoile à neutrons [● ○ ○]

Un pulsar est une étoile à neutrons tournant rapidement sur elle-même (période de l'ordre de la seconde) et émettant des rayonnements électromagnétiques importants.

Une étoile à neutron se forme lorsqu'une étoile arrive en fin de vie : n'ayant plus de combustible nucléaire à brûler, elle ne produit plus de chaleur et s'effondre sous l'effet de son propre poids.

Si elle est assez massive, l'effondrement de son noyau ne s'arrête brutalement que lorsque sa matière s'est entièrement transformée en neutrons (si elle est encore plus massive, c'est un trou noir qui se forme). Ceci produit une onde de choc, une production de neutrinos, et ces deux effets entraînent un rebond des couches externes : c'est l'explosion en supernova.

Le pulsar du Crabe est situé au centre de la nébuleuse du Crabe. Il est ce qu'il reste d'une étoile ayant explosé en supernova en l'an 1054. Sa période de rotation est de 33 ms.

Mais le noyau de l'étoile, transformé en soupe de neutrons, reste en place. S'il tourne rapidement sur lui-même, c'est un pulsar. C'est l'explication de cette rotation qui nous intéresse ici.

Pour cela, on modélise le noyau de l'étoile comme une boule homogène de moment d'inertie par rapport à son centre $J_1 = \dfrac{2}{5} m R_1^2$. Ce noyau tourne sur lui même, avec une période T_1. On peut prendre $R_1 = 100\,000\,\mathrm{km}$ et $T_1 = 30\,\mathrm{jours}$, ordres de grandeur possibles pour le noyau de certaines étoiles.

Ce noyau s'effondre, pour donner une étoile à neutrons de rayon $R_2 = 10\,\mathrm{km}$ (cas par exemple du pulsar du Crabe ci-contre) et de période T_2 à déterminer.

On suppose que le noyau n'interagit avec rien lors de son effondrement : c'est un système isolé.

1 - Déterminer la période de rotation de l'étoile à neutrons.

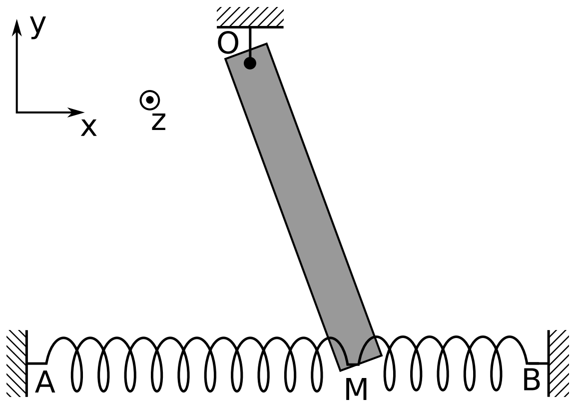
2 - Vous pouvez tester ce phénomène d'accélération de rotation induit par une réduction du moment d'inertie : se mettre sur une chaise de bureau en rotation, les bras tendus sur les côtés tenant des objets un peu lourds, puis ramener les bras vers soi.

V Pendule relié à deux ressorts [• • ○]

On considère un pendule pesant constitué par une tige homogène, de masse m, longueur L, et moment d'inertie par rapport à l'axe Oz donné par $J_{Oz} = \frac{1}{3}mL^2$.

Son extrémité en M est attachée à deux ressorts identiques, de raideur k et longueur à vide l_0. Ils sont fixés à des points A et B, la longueur AB étant égale à $2l_0$, si bien qu'à l'équilibre le point M est au milieu du segment AB.

On fera l'hypothèse des faibles angles et on supposera que les ressorts restent toujours horizontaux.



1 - Donner l'expression du moment cinétique de la tige projeté sur l'axe Oz, en fonction de J_{0z} et de $\dot{\theta}$.

Énoncer ensuite le théorème du moment cinétique.

2 - Utiliser la question précédente pour établir l'équation du mouvement.

Puis la résoudre et donner l'expression de la pulsation ω_0 des oscillations. On fera l'approximation des petits angles.

Indications pour 2/ : Donner l'expression des forces (attention aux signes pour les ressorts : voir pour cela dans quel sens cela doit tirer en prenant l'exemple du schéma de l'énoncé), puis des moments, puis appliquer le théorème du moment cinétique.