Partie VI : Mécanique
Chapitre 5

Théorème du moment cinétique

I Moment cinétique

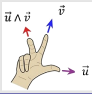
1 - Par rapport à un point

a/ Définition

$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

b/ Propriétés et exemples

- direction et sens
- nul si colinéaires...



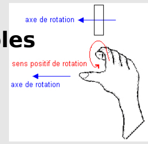
2 - Par rapport à un axe (par ex. Oz)

a/ Définition

$\sigma_{Oz} = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z$

b/ Propriétés et exemples

- direction et sens
- nul si colinéaires...



II Moment d'une force

1 - Introduction

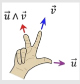
a/ Définition

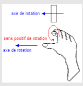
$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

$\Gamma_{Oz} = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{e}_z$

b/ Propriétés

- direction et sens
- nul si colinéaires...





2 - Méthodes de calcul et exemples

a/ Méthode du bras de levier

b/ Méthode avec le produit vectoriel

III Théorème du moment cinétique ⟵ Relie $\vec{\sigma}_O$ et $\vec{\Gamma}_O$

1 - Énoncé - point O fixe ET - réf. galiléen

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\Gamma}_O(\vec{F}_i) \qquad \Big| \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_i)$$

2 - Exemple : le pendule simple

a/ Étude via le moment cinétique

b/ Portrait de phase

Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

▶1 Comment est défini le moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O ?
Et par rapport à un axe Oz orienté par le vecteur $\vec{e}_z$?

——— (cours : II)

▶2 Comment est défini le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O ?
Et par rapport à un axe Oz orienté par le vecteur $\vec{e}_z$?

——— (cours : III)

▶3 Comment s'écrit le théorème du moment cinétique ? (préciser les hypothèses)

Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I)

▶4 Calculer un moment cinétique, interpréter son sens (moment vectoriel) ou son signe (moment scalaire). → **EC1**

——— (cours : II)

▶5 Calculer le moment d'une force, interpréter son sens (moment vectoriel) ou son signe (moment scalaire). → **EC2**

——— (cours : III)

▶6 Utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à un point ou un axe. → **EC3**

Exercices de cours

Exercice C1 – Calculer et interpréter un moment cinétique

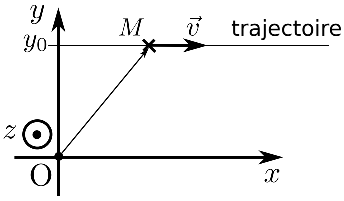
Un point matériel de masse m suit la trajectoire $x(t) = v_0 t$, $y(t) = y_0$, $z(t) = 0$, avec $v_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

1 - Tracer la trajectoire.

2 - Donner l'expression du moment cinétique en O.

3 - Vérifiez que sa direction et son sens sont cohérents (règle de la main droite)

4 - Donner enfin l'expression du moment cinétique de M par rapport à l'axe Oz. Vérifier que son signe est cohérent (en termes de sens de rotation autour de O).



1 - Trajectoire : simple droite.

2 - $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, il faut donc connaître les expressions de $\overrightarrow{OM}$ et de $\vec{v}$.

$\star$ $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = v_0 t\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y$.

$\star$ $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = v_0\,\vec{e}_x$.

$\star$ Donc :

$$\vec{\sigma}_O = (v_0 t\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y) \wedge m v_0\,\vec{e}_x = m v_0^2 t\,\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x + y_0 m v_0\,\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x,$$

d'où $\boxed{\vec{\sigma}_O = -y_0 m v_0\,\vec{e}_z.}$

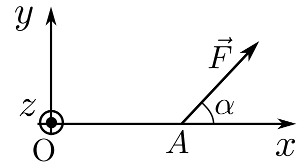
3 - On voit avec la règle de la main droite, sur le schéma, que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ doit être dirigé selon $-\vec{e}_z$.

4 - Pour obtenir σ_{Oz}, on projette $\vec{\sigma}_O$ sur $\vec{e}_z$, donc $\boxed{\sigma_{Oz} = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z = -y_0 m v_0.}$

Il est négatif, ce qui est normal car le point M tourne dans le sens indirect autour de l'axe Oz (utiliser la règle du tire bouchon).

Exercice C2 – Calculer et interpréter le moment d'une force

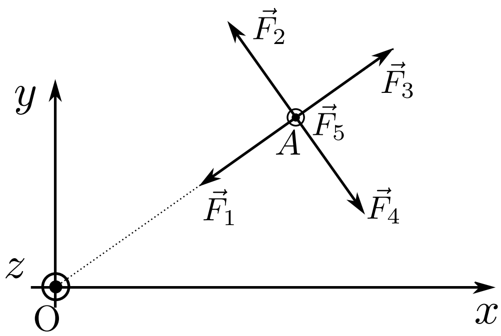
1 - Sur le schéma ci-contre, le point A a pour coordonnées $(x_0,0,0)$. Une force $\vec{F}$ s'applique sur ce point.



a – Donner l'expression du moment $\vec{\Gamma}_O$ de cette force (en fonction de la norme F de $\vec{F}$, de α et de x_0).

b – Donner également l'expression du moment scalaire Γ_{Oz}. Expliquer son signe.

2 - On s'intéresse au schéma ci-contre.



Donner les expressions du moment scalaire par rapport à l'axe Oz, orienté selon $+\vec{e}_z$, de chacune des cinq forces apparaissant sur le schéma (en fonction de leur norme $F = \|\vec{F}\|$ et de $d = OA$).

1 - a - $\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = x_0 F \sin\alpha\,\vec{e}_z$ car α est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$, et car avec la main droite on voit que le produit vectoriel doit être selon $+\vec{e}_z$.

b - $\Gamma_{Oz} = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{e}_z = x_0 F \sin\alpha$.

C'est ici positif, ce qui est attendu car la force tend à faire tourner A autour de l'axe dans le sens direct (cf règle du tire-bouchon).

2 - $\star$ Les moments des forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$ et $\vec{F}_5$ sont nuls car ces forces sont dirigées vers l'axe (ou parallèle pour $\vec{F}_5$).

Ceci peut se vérifier par le calcul direct si besoin.

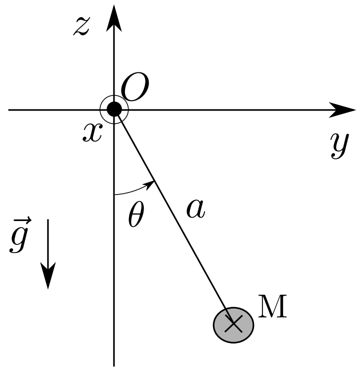
$\star$ Pour les autres, on peut utiliser le bras de levier, ce qui est simple car ici OA est directement perpendiculaire à la force.

On a donc $\Gamma_{Oz}(\vec{F}_2) = Fd$ (tend à faire tourner dans le sens direct),

et $\Gamma_{Oz}(\vec{F}_4) = -Fd$ (tend à faire tourner dans le sens indirect).

Exercice C3 – Pendule simple

On considère un pendule dont toute la masse est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note a sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ avec z axe vers le haut et $g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$ constante. On fera usage des coordonnées cylindriques.



1 - Donner l'expression du moment cinétique de la masse par rapport à O, en fonction de a, $\dot{\theta}$, m et d'un vecteur bien choisi.

2 - Donner l'expression du moment de chacune des forces s'exerçant sur la masse, par rapport à O.

3 - Rappeler l'énoncé du théorème du moment cinétique. L'appliquer au cas présent afin d'en déduire une équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.

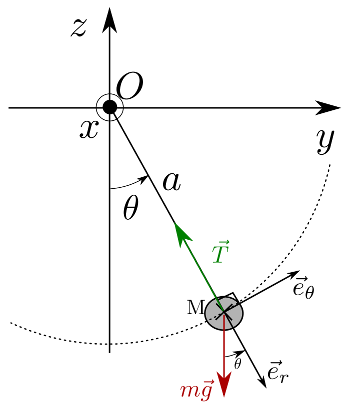
4 - Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre.

On supposera qu'à $t = 0$ le pendule est en $\theta = 0$ et qu'on lui communique une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$.

5 - Que vaut la période des oscillations pour une masse de 1 kg et un fil de longueur 1,0 m ?

1 - $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$.

Or $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_r$ et $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, donc $\vec{\sigma}_O = a\vec{e}_r \wedge ma\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, d'où $\boxed{\vec{\sigma}_O = ma^2\dot{\theta}\vec{e}_z.}$



2 - Bilan des forces : poids $m\vec{g}$ et tension du fil $\vec{T}$.

⋆ $\vec{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, donc $\vec{\Gamma}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$.

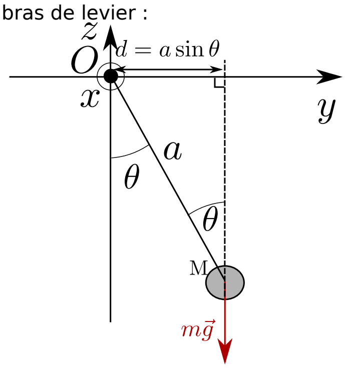
⋆ Méthode 1 :

$\vec{\Gamma}_O(m\vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -\|\overrightarrow{OM}\|\,\|m\vec{g}\|\,\sin\theta\,\vec{e}_z = -amg\sin\theta\,\vec{e}_z$,

car θ est bien l'angle entre ces deux vecteurs, et signe moins car d'après la règle de la main droite le produit vectoriel est selon $-\vec{e}_z$ (ou encore car $m\vec{g}$ tend sur le schéma à faire tourner le pendule dans le sens indirect autour de l'axe).

Autre méthode, calcul direct : on écrit $\vec{g} = (g\cos\theta\,\vec{e}_r - g\sin\theta\,\vec{e}_\theta$, puis $\vec{\Gamma}_O(m\vec{g}) = a\vec{e}_r \wedge mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta) = -amg\sin\theta\,\vec{e}_z$.

schéma pour la méthode du bras de levier :



Autre méthode : avec le bras de levier, cf schéma, on a $\vec{\Gamma}_O(m\vec{g}) = -dmg\vec{e}_z$ d'après la règle de la main droite le produit vectoriel est selon $-\vec{e}_z$ (ou encore car $m\vec{g}$ tend sur le schéma à faire tourner le pendule dans le sens indirect autour de l'axe).

Or $d = a\sin\theta$, d'où le même résultat.

3 - Théorème du moment cinétique au point O (qui est fixe) dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\Gamma}_O(m\vec{g}) + \vec{\Gamma}_O(\vec{T})$$

Ici on a donc $\dfrac{\mathrm{d}ma^2\dot{\theta}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = -amg\sin\theta\,\vec{e}_z$.

D'où $ma^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = -amg\sin\theta\,\vec{e}_z$.

D'où $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{g}{a}\sin\theta = 0.}$

4 - Si on suppose l'amplitude des oscillations petite, donc $\theta \ll 1$, alors $\sin\theta \simeq \theta$, et on trouve l'équation de l'oscillateur harmonique : $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \ \text{ avec } \ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{a}}.}$

$\star$ Solutions : $\theta(t) = \theta_{\text{hom}}(t) + \underbrace{\theta_{\text{part}}}_{=0 \text{ ici}} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ avec A et B constantes d'intégrations.

$\star$ CI1 : $\theta(0) = 0$. Or $\theta(0) = A\cos(0) = A$, donc $A = 0$ et on a $\theta(t) = B\sin\omega_0 t$.

$\star$ CI2 : $\dot\theta(0) = \dot\theta_0$. Or $\dot\theta(t) = B\omega_0\cos\omega_0 t$, d'où $\dot\theta(0) = \omega_0 B$.
D'où $B = \dot\theta_0/\omega_0$.

$\star$ Finalement, $\boxed{\theta(t) = \dfrac{\dot\theta_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t.}$

5 - Période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}} = 1{,}99\,\text{s}$.

Notions mathématiques

Produit vectoriel

$\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur.

- Il est tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v})$ forme un trièdre direct : on obtient donc sa direction avec la règle de la main droite.
- Sa norme est $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin\alpha$ avec α = angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriétés :

- $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur, perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$
- $\vec{u}\wedge\vec{u} = \vec{0}$, et $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u}//\vec{v}$
- $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{u} = 0$ car $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ (et à $\vec{v}$).

Exemples :

- $\vec{e}_x\wedge\vec{e}_y = \vec{e}_z$
- $\vec{e}_y\wedge\vec{e}_z = \vec{e}_x$
- $\vec{e}_z\wedge\vec{e}_x = \vec{e}_y$

Cours

Nous voyons cette année trois principales méthodes pour traiter un problème de mécanique :

- l'utilisation directe du principe fondamental de la dynamique (PFD, ou seconde loi de Newton), cf chapitres 1 (coordonnées cartésiennes) et 2 (autres coordonnées) ;
- les méthodes énergétiques (théorème de l'énergie cinétique, de l'énergie mécanique), cf chapitre 3 ;
- l'utilisation du théorème du moment cinétique, qui est l'objet de ce chapitre, et qui est approprié pour les mouvements de rotation ou de révolution.

I – Moment cinétique

1 – Par rapport à un point

a/ Définition

Définition : moment cinétique d'un point par rapport à un autre point

Soit un point matériel M (masse m et vitesse $\vec{v}$).
Son moment cinétique par rapport à un point O est défini par :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}.}$$

Remarques :

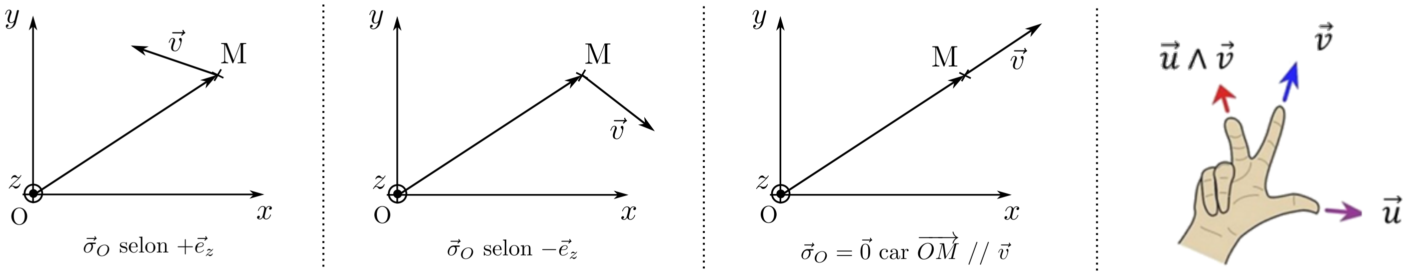
- Il faut fixer un point de référence (le point O dans la définition).
- Le moment cinétique par rapport à un point est un *vecteur*.
- Comme la vitesse $\vec{v}$ dépend du référentiel, le moment cinétique également.

b/ Propriétés et exemples

- D'après les propriétés du produit vectoriel, le vecteur $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ est $\perp$ à $\overrightarrow{OM}$ et à $\vec{v}$.
- Or le plus souvent, le mouvement a lieu dans un plan (par exemple le plan Oxy).

  $\Rightarrow$ Dans ce cas, $\vec{\sigma}_O$ est est perpendiculaire au plan du mouvement (si plan Oxy, alors $\vec{\sigma}_O$ est porté par $\pm\vec{e}_z$).
- Pour obtenir la direction du vecteur $\vec{\sigma}_O$, on utilise la règle de la main droite (cf schéma).

  Cas particulier : $\vec{\sigma}_O = \vec{0}$ si $\overrightarrow{OM}$ colinéaire à $\vec{v}$.



Exemple : Vérifier la direction de $\vec{\sigma}_O$ sur les trois cas ci-dessus. Puis faire l'**EC1**, sauf la dernière question.

2 – Par rapport à un axe

a/ Définition

Définition : moment cinétique d'un point par rapport à un axe

– Soit un point matériel M (masse m et vitesse $\vec{v}$).
– Soit un axe Oz dont la direction est définie par un vecteur unitaire $\vec{e}_z$.
Le moment cinétique de M par rapport à l'axe Oz est :

$$\boxed{\sigma_{Oz} = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z.}$$

Remarques :

- Il s'agit du moment cinétique par rapport à un point de l'axe, projeté sur cet axe via le produit scalaire $\cdot\vec{e}_z$.
- Le moment cinétique par rapport à un axe est un scalaire.
- Il ne dépend pas du point O choisi sur l'axe.

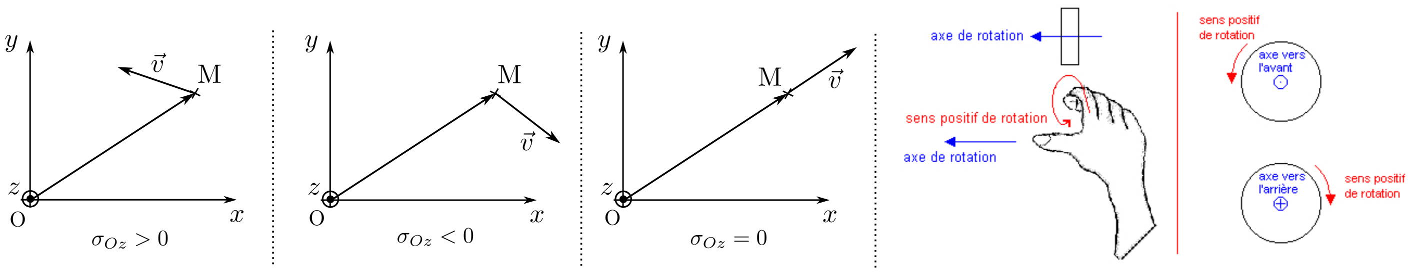
b/ Propriétés et exemples

- Signe de σ_{Oz} :

  M tourne autour de l'axe dans le sens direct (donné par la règle du tire-bouchon, cf schéma) $\Rightarrow \sigma_{Oz} > 0$.

  M tourne autour de l'axe dans le sens indirect (donné par la règle du tire-bouchon, cf schéma) $\Rightarrow \sigma_{Oz} < 0$.

  Si M se dirige exactement vers l'axe ou s'en éloigne exactement, alors $\sigma_{Oz} = 0$.



Exemple : Vérifier la direction de σ_{Oz} sur les trois cas ci-dessus. Puis faire l'**EC1**, dernière question.

II – Moment d'une force

1 – Introduction

a/ Définition

Définition : moment d'une force par rapport à un point ou un axe

Soit une force $\vec{F}$ (ou une résultante de forces) s'appliquant en un point M.

- Le moment de cette force par rapport à un point O est :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}.}$$

- Le moment de cette force par rapport à un axe Oz, dont la direction est définie par un vecteur unitaire $\vec{e}_z$, est :

$$\boxed{\Gamma_{Oz} = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{e}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z.}$$

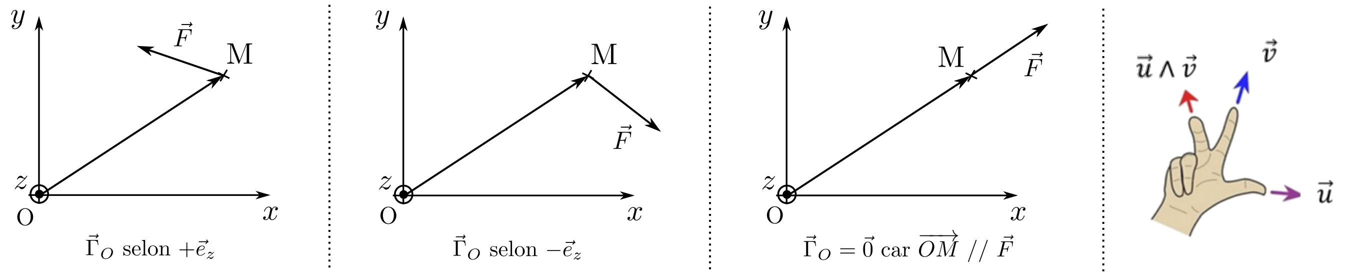
- L'unité du moment d'une force est le newton mètre, $\mathrm{N \cdot m}$.
- Le moment d'une force indique comment cette force tend à faire tourner le point où elle s'applique autour de O ou de l'axe Oz.

b/ Propriétés

On a des propriétés similaires à celles du moment cinétique :

- Si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ sont dans un même plan (ce qui est souvent le cas), alors $\vec{\Gamma}_O$ est perpendiculaire à ce plan.
- La direction du vecteur $\vec{\Gamma}_O$ est donnée par la règle de la main droite.

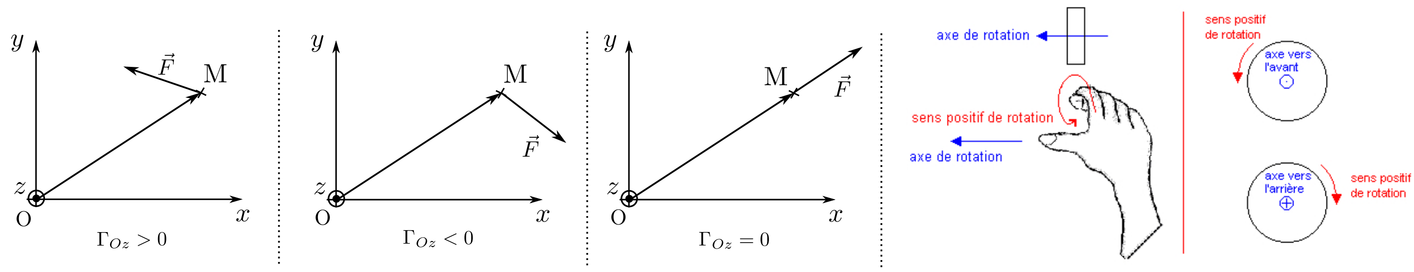
  Cas particulier : $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ si $\overrightarrow{OM}$ colinéaire à $\vec{F}$.



- Signe de Γ_{Oz} :

  $\Gamma_{Oz} > 0$ si $\vec{F}$ tend à faire tourner le point M dans le sens direct autour de l'axe (sens donné par la règle du tire-bouchon).

  $\Gamma_{Oz} < 0$ si sens indirect.



2 – Méthodes de calcul et exemples

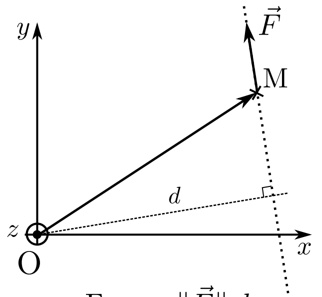
a/ Méthode du bras de levier

On peut calculer le moment d'une force en calculant directement le produit vectoriel. Il existe une autre méthode, celle du bras de levier.

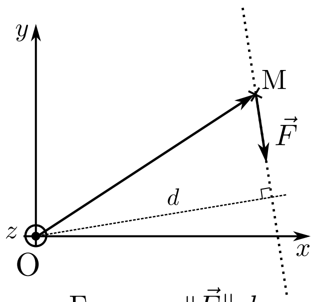
Pour le calcul d'un moment par rapport à un axe, lorsque la force est dans le plan perpendiculaire à l'axe :

- tracer la droite qui passe par M et qui est portée par $\vec{F}$.

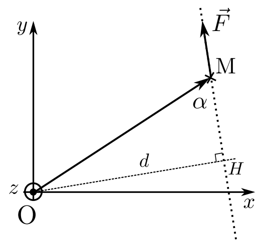
- Soit d la distance entre l'axe et cette droite.
- Le moment de $\vec{F}$ vaut $\boxed{\Gamma_{Oz} = \pm\|\vec{F}\|\,d.}$
- Si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens direct, c'est un $+$.
  Si sens indirect, c'est un -.



$\Gamma_{Oz} = \|\vec{F}\|\,d$



$\Gamma_{Oz} = -\|\vec{F}\|\,d$



(schéma pour la démonstration)

> **Démonstration :** pour les curieux, voici comme on démontre cette formule.
> $|\Gamma_{Oz}| = |(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z| = \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\| \times \|\vec{e}_z\|$ (par de terme en cos car $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ et $\vec{e}_z$ sont colinéaires).
> Or pour un produit vectoriel, on a $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times \sin(\overrightarrow{OM},\vec{F}) = d\,\|\vec{F}\|\,\sin\alpha$.
> D'où le résultat.

b/ Méthode avec le produit vectoriel

Le plus simple est parfois de calculer directement le produit vectoriel, comme on le fait pour le moment cinétique. Vous êtes néanmoins libre de choisir votre méthode.

Exemple : Faire l'**EC2**.

III – Théorème du moment cinétique

Tout comme le PFD relie la dérivée de la quantité de mouvement aux forces, le théorème du moment cinétique relie la dérivée du moment cinétique aux moments des forces.

1 – Énonce

Théorème du moment cinétique pour un point matériel, par rapport à un point fixe

- On se place dans un référentiel galiléen,
- et on considère un point O *fixe*.

Soit alors un point matériel M de masse m, de moment cinétique en O $\vec{\sigma}_O$, soumis à des forces $\vec{F_i}$.
Alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\Gamma}_O(\vec{F_i}).$$

Théorème du moment cinétique pour un point matériel, par rapport à un axe fixe

Même chose, mais on considère un axe Oz *fixe*.
Alors :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F_i}).$$

(par rapport au TMC de l'encadré précédent, il suffit de prendre le produit scalaire par $\vec{e}_z$)

Démonstration (n'est pas à savoir faire) :

Ce théorème n'est pas un nouveau postulat de la théorie de la mécanique, il peut être démontré à partir des lois de Newton.

⋆ On se place dans les hypothèses de l'énoncé du théorème. On applique le principe fondamental de la dynamique au point M (d'où l'importance du référentiel galiléen) : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F_i}$.

⋆ Partons de l'expression $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ et dérivons là par rapport au temps. Il faut pour cela savoir qu'un produit vectoriel se dérive comme un produit (cela peut se montrer en raisonnant composante par composante...) :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{\mathrm{d}m\vec{v}}{\mathrm{d}t}}_{=\sum_i \vec{F_i}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{v}} \wedge m\vec{v}.$$

Or $\vec{v} \wedge m\vec{v} = m \times \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Donc il reste :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{F_i} = \sum_i \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_i}}_{=\vec{\Gamma}_O(\vec{F_i})}.$$

On a donc bien le théorème du moment cinétique.

Remarque : On voit dans la démonstration qu'il est nécessaire que le point O soit fixe dans le référentiel d'étude, car sinon $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}(M) - \vec{v}(O)$ n'est pas la vitesse du point M. Il existe donc une version par rapport à un point ou axe pas nécessairement fixe, mais qui n'est pas au programme.

2 – Exemple : le pendule simple

a/ Étude via le moment cinétique

Nous retrouvons un exemple déjà traité avec le PFD ou l'approche énergétique : le pendule simple, qui est l'exemple typique de problème où il est possible d'utiliser le TMC.

Faire l'**EC3**.

b/ Portrait de phase

Rappels : Le portrait de phase est le tracé, pour une condition initiale donnée, de l'évolution de $\dot{x}$ en fonction de x, où x est la coordonnée du mouvement. Dans le cas du pendule, il s'agit donc du tracé de $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Nous avions étudié ceci pour le pendule :

– Dans le chapitre 2, partie IV : pour des amplitudes faibles, l'équation du mouvement est $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

  On multiplie par $\dot{\theta}$ et on primitive : $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}t} = \mathrm{cst}$, d'où

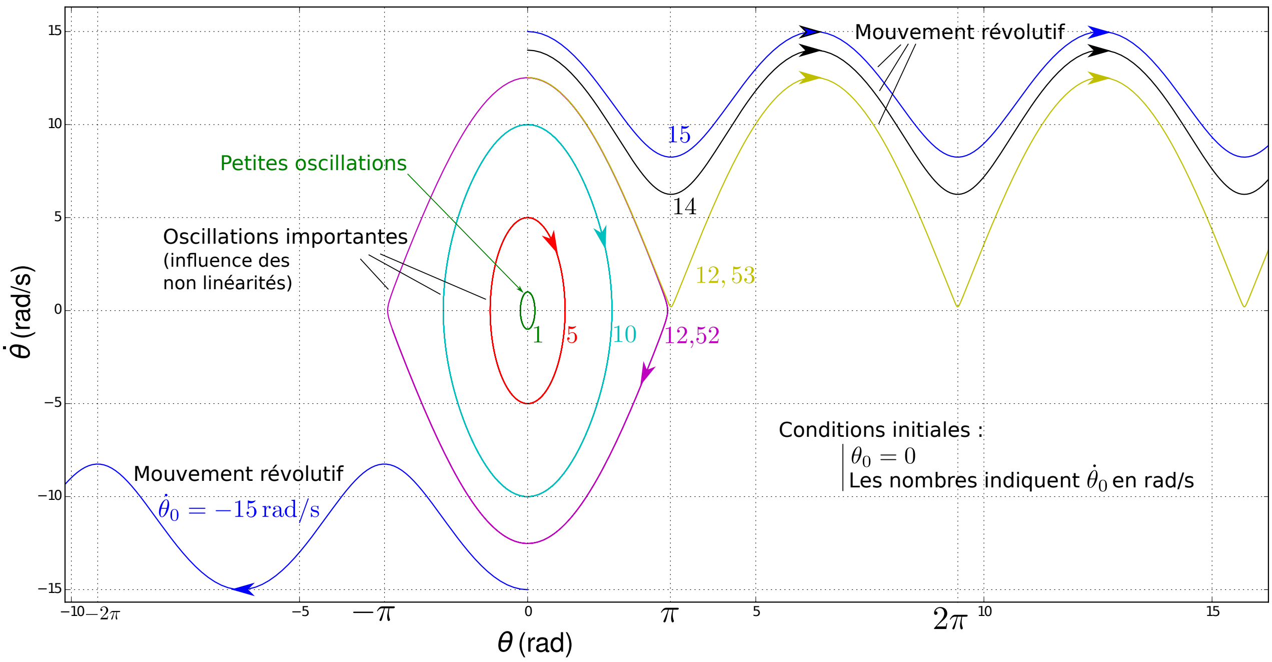
  $$\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = \mathrm{cst},$$

  ce qui dans le portrait de phase donne l'équation d'une ellipse.

  La période est $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ et ne dépend pas de l'amplitude du mouvement.

– Dans le chapitre 3, partie V.4 et TD VI : nous avions vu que pour des oscillations plus grandes, l'équation du mouvement reste $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, les ellipses dans le portrait de phase sont déformées, et la période des oscillations dépend de l'amplitude du mouvement.

Nous pouvons aller vers des amplitudes encore plus grandes, et même, lancer le pendule assez fort pour qu'il fasse des tours complets !
Le portrait de phase ci-dessous illustre ce qu'il se passe.



Sur ce portrait de phase, nous avons tracé les trajectoires pour des conditions initiales où $\theta_0 = 0$ (le pendule part de la position de repos) et $\dot{\theta}_0$ non nul (on lui donne une vitesse angulaire initiale).

– Si $\dot{\theta}_0$ est assez petit, nous sommes dans le cadre des petites oscillations, il s'agit d'ellipse.

– Pour $\dot{\theta}_0$ plus élevé, les trajectoires sont déformées.

– Au-delà d'un certain seuil, le pendule a assez d'élan pour faire des révolutions complètes.

On voit que le comportement change radicalement lorsque $\dot{\theta}_0$ passe au-dessus de $12{,}52\,\mathrm{rad/s}$. On parle de **bifurcation** pour désigner un tel changement de comportement soudain.

Remarque : On peut montrer avec une étude énergétique que la valeur seuil est donnée par $2\omega_0$. Ici, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ et $l = 25\,\mathrm{cm}$, donc $2\omega_0 = 12{,}528\,\mathrm{rad/s}$.