

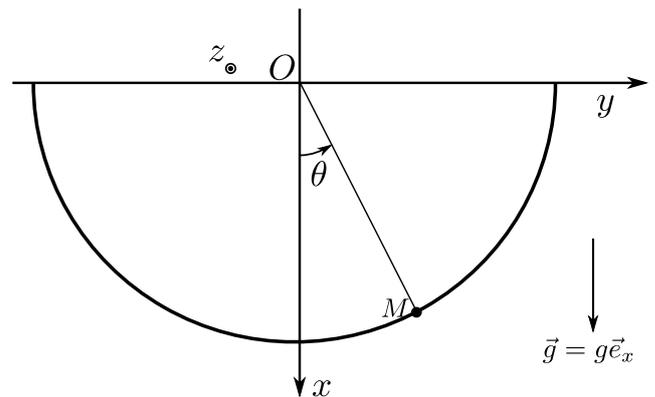
TD – Théorème du moment cinétique

Remarque : exercice avec \star : exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu’il faut savoir faire”) | $\bullet \circ \circ$: difficulté des exercices

I Snowbord dans un half-pipe \star | $\bullet \circ \circ$

Nous reprenons l’exercice du chapitre 2 sur le snowboarder dans un half-pipe, afin de voir comment le traiter à l’aide du théorème du moment cinétique.

Pour simplifier, on considère que le skieur se déplace sur un plan en coupe perpendiculaire à l’axe du half-pipe. On l’assimile à un point matériel de masse m , qui glisse sans frottement, et on considère que le half-pipe est un demi-cylindre de rayon R constant. Le snowboarder démarre en $\theta = \pi/2$ avec une vitesse nulle.



1 - En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l’équation du mouvement portant sur l’angle θ (bilan des forces, expression des moments par rapport à un axe, expression du moment cinétique, TMC).

2 - Peut-on la résoudre simplement ? Dans quel cas faudrait-il se placer et quelles seraient alors la forme générale des solutions ?

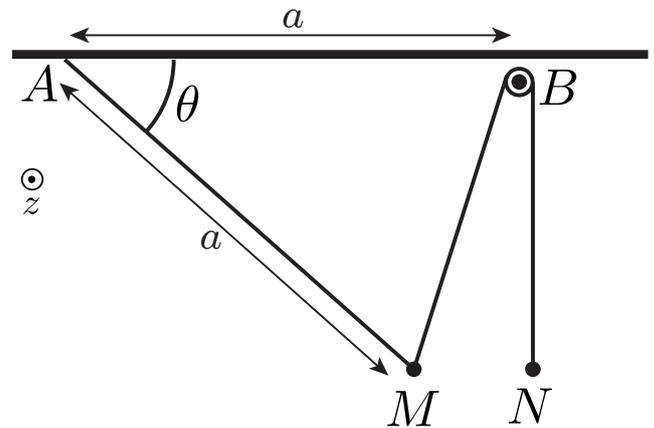
II Position d'équilibre statique [●●○]

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions. $AB = a$. Sur le fil, en un point M tel que $AM = a$, est attachée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N . Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur \vec{g} .

1 - Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A (le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera l'angle $\theta = (AB, AM)$).

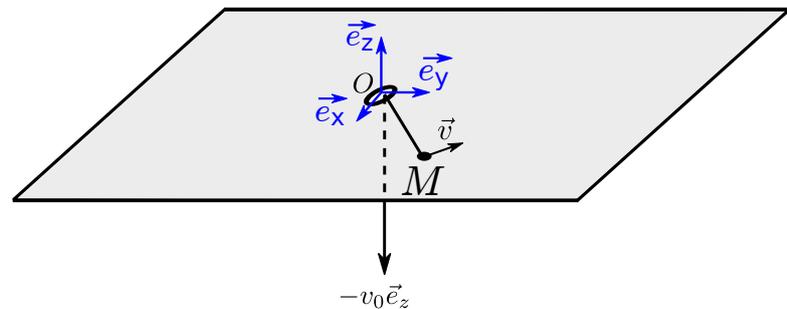
2 - Trouver une relation vérifiée par l'angle θ lorsque le système est à l'équilibre.

Facultatif : trouver la solution de cette équation. On pourra utiliser la relation $\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$. On discutera de la condition sur m et m' pour que la solution existe.



III Masse attachée à une ficelle [●●○]

Un point matériel M de masse m , attaché à une ficelle, peut glisser sans frottement sur un support. La ficelle passe par un trou du support et est tirée vers le bas par un opérateur à une vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{e}_z$ ($v_0 > 0$). La masse m est lancée initialement avec une vitesse angulaire ω_0 , et la longueur du fil sur le plan est initialement l_0 .



1 - Choisir un système de coordonnées adaptées. Donner l'expression de la distance $r(t) = OM$ en fonction notamment de l_0 et v_0 .

Donner l'expression du moment cinétique du point M par rapport à O .

2 - Appliquer le théorème du moment cinétique au point M .

3 - En déduire l'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ du point M .

4 - Donner l'expression de l'énergie cinétique du point M . Comment varie-t-elle? D'où provient cette augmentation d'énergie?

IV Pendule conique [•••]

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Az .

On donne une certaine vitesse initiale à la masse, afin de la faire tourner autour l'axe z . On note ω la vitesse angulaire ainsi atteinte. On note Oxy le plan dans lequel ce mouvement a lieu, et α l'angle qui s'établi entre l'axe et le fil.

On suppose un régime stationnaire atteint : α et ω restent constants.

On utilisera la base cylindrique dans le plan Oxy , d'axe Oz . La pesanteur est dirigée selon $-\vec{e}_z$.

- 1 - Étant donné que la force de tension du fil sur la masse est inconnue, par rapport à quel point va-t-il être judicieux de calculer les moments des forces ?
- 2 - À l'aide du théorème du moment cinétique, donner l'expression de l'angle α en fonction de L , ω et g .

