

## IV Démonstration de la nature circulaire du mouvement dans un champ $\vec{B}$ [●●○]

1 -  $\vec{F} = q(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) \wedge (B\vec{e}_z) = qB(-\dot{x}\vec{e}_y + \dot{y}\vec{e}_x)$ .

Donc le PFD donne :

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} \quad \text{et} \quad m\ddot{y} = -qB\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0.$$

D'où :

$$\boxed{\ddot{x} = \omega_c \dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0.}$$

2 - On a  $\ddot{z} = 0$ , donc  $\dot{z} = \text{cst} = 0$  car  $\dot{z}(t=0) = 0$  (vitesse initiale nulle selon  $\vec{e}_z$ ).

On a donc en intégrant encore une fois :  $\boxed{z(t) = \text{cst} = 0}$  car  $z(t=0) = 0$ .

3 -  $\star \ddot{x} = \omega_c \dot{y}$  s'intègre en  $\dot{x} = \omega_c y + A$  avec  $A$  une constante.

On évalue  $A$  en prenant  $t = 0$  :  $0 = 0 + A$ , donc  $A = 0$  et on a  $\boxed{\dot{x} = \omega_c y}$ .

$\star \ddot{y} = -\omega_c \dot{x}$  s'intègre en  $\dot{y} = -\omega_c x + C$ .

On évalue  $C$  en prenant  $t = 0$  :  $v_0 = -\omega_c(-R) + C$ , donc  $C = v_0 - \omega_c R = v_0 - v_0 = 0$  et on a  $\boxed{\dot{y} = -\omega_c x}$ .

4 -  $\ddot{x} \underset{\uparrow \text{q1}}{=} \omega_c \dot{y} \underset{\uparrow \text{q3}}{=} \omega_c(-\omega_c x)$ .

D'où  $\boxed{\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0}$ .

Et de même,  $\ddot{y} \underset{\uparrow \text{q1}}{=} -\omega_c \dot{x} \underset{\uparrow \text{q3}}{=} -\omega_c^2 y$ , soit donc

$$\boxed{\ddot{y} + \omega_c^2 y = 0.}$$

5 -  $\star x(t) = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t$ .

Or  $x(0) = -R$  donc  $A = -R$ . Et  $\dot{x}(0) = 0$  donc  $B = 0$ .

Finalement :  $\boxed{x(t) = -R \cos \omega_c t}$ .

$\star y(t) = C \cos \omega_c t + D \sin \omega_c t$ .

Or  $y(0) = 0$  donc  $C = 0$ , et  $\dot{y}(0) = v_0$  donc  $D\omega_c = v_0$  donc  $D = v_0/\omega_c = R$ .

Finalement :  $\boxed{y(t) = R \sin \omega_c t}$ .

6 - D'après ce qui précède,  $x = -R \cos \omega_c t$  et  $y = R \sin \omega_c t$ . On a donc bien  $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$ . C'est l'équation cartésienne d'un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$ .

**Remarque :** une démonstration plus courte consiste à utiliser la base de Frenet (cf chapitre 2), dans laquelle le vecteur accélération s'écrit :  $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R(t)}\vec{N}$ , où  $v$  est la norme du vecteur vitesse. Comme cette norme est constante (car on a montré que la partie magnétique de la force de Lorentz est de puissance nulle), l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{R(t)}\vec{N}.$$

Ci-dessus  $R(t)$  est le rayon de courbure instantané de la trajectoire.

D'autre part, la norme de la force de Lorentz est  $\|\vec{F}\| = |qvB|$  car  $\vec{v} \perp \vec{B}$  à tout instant (le mouvement a lieu dans le plan  $xOy$ ).

Avec le PFD :  $m\|\vec{a}\| = \|\vec{F}\| \Rightarrow \frac{mv_0^2}{R(t)} = |qv_0B|$ , d'où le fait que  $R(t) = \text{cst}$  et que la trajectoire est circulaire.

## V Cyclotron

1 - Cf démonstration du cours pour prouver que le rayon est  $R = \frac{mv}{eB}$ .

2 - Temps pour un demi-tour :  $T = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi m v / eB}{v}$  soit

$$T = \frac{\pi m}{eB}.$$

Ceci ne dépend pas de  $v$ .

3 - Le proton passe tout les  $T = \frac{\pi m}{eB}$ , mais tantôt en venant de la droite et tantôt de la gauche. Si on veut l'accélérer à chaque fois, il faut que le champ électrique soit à chaque fois dans le même sens que sa vitesse, donc il faut inverser le sens du champ électrique à chaque passage, avec une fréquence

$$f = \frac{1}{T} = \frac{eB}{\pi m}.$$

4 - Notons  $E_{mA}$  l'énergie mécanique du proton juste avant qu'il n'entre dans la zone centrale où il est accéléré, et  $E_{mB}$  celle lorsqu'il ressort.

On a  $E_{mA} = E_{cA} + eV_A$  et  $E_{mB} = E_{cB} + eV_B$ , avec  $V_A - V_B = U_m$  la différence de potentiel appliquée.

Or  $E_{mA} = E_{mB}$ , d'où  $E_{cB} + eV_B = E_{cA} + eV_A$ , d'où une augmentation

$$\Delta E_c = E_{cB} - E_{cA} = e(V_A - V_B) = eU_m.$$

5 - Notons  $v_f = 15 \cdot 10^3$  km/s. L'objectif est que le proton atteigne une énergie cinétique finale  $E_{cf} = \frac{1}{2}mv_f^2$ .

Il faut donc un nombre d'accélération qui est  $N = \frac{E_{cf}}{\Delta E_c} = \frac{E_{cf}}{eU_m} = 469,1$ , donc disons  $N = 470$  demi-tours.

6 -  $R_f = \frac{mv_f}{eB} = 1,6$  m.