

Correction – DM 15 – Spectromètre de masse

1 - On raisonne sur l'énergie mécanique, qui est conservée car le mouvement est conservatif (seule force prise en compte : la force électrique $q\vec{E}$).

- Au point S : $E_{m,S} = \frac{1}{2}mv_S^2 + qV_S = 0 + qV_S$.

- Au point O : $E_{m,O} = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_O$.

En égalisant les deux on obtient : $\frac{1}{2}mv_0^2 = qV_S - qV_O$. Or $U = V_S - V_O$, donc

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad \text{et} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

2 - En présence d'un seul champ magnétique, la force qui s'exerce sur la charge est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La puissance de cette force est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ car $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$.

Ainsi d'après le théorème de l'énergie cinétique, E_c reste constante, donc v aussi.

3 - La trajectoire est un cercle comme sur la figure ci-dessous. Il faut choisir un repère polaire.

$$\vec{AM} = R\vec{e}_r, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

On a aussi $\vec{v} = v\vec{e}_\theta$ avec v la composante de la vitesse (pas sa norme), donc $v = R\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$ et on peut remplacer dans l'accélération :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

On sait aussi que $\ddot{\theta} = 0$ car $v = R\dot{\theta}$ est constant.

Calculons ensuite la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_z = qvB\vec{e}_r.$$

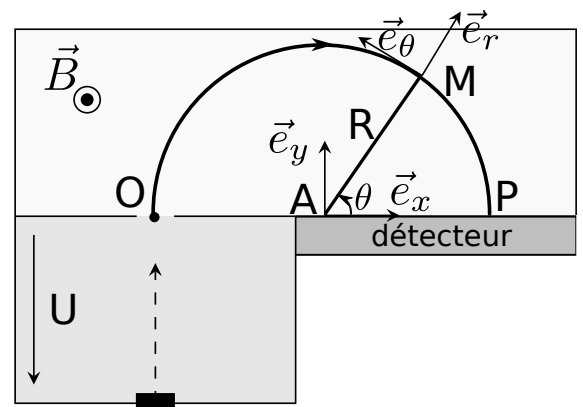
On applique le principe fondamental de la dynamique à la charge (référentiel galiléen) :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{donc} \quad -\frac{mv^2}{R}\vec{e}_r = qvB\vec{e}_r.$$

On en déduit que $\frac{mv}{R} = qB$, donc $R = \frac{mv}{qB}$.

Enfin d'après la question 1 on a l'expression de v :

$$R = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}}, \quad \text{soit} \quad R = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}.$$



4 - On trouve $OP = 2R = 14.4$ cm pour l'hydrogène, et 20.4 cm pour le deutérium, dont la différence est largement mesurable !

Correction – DM 15 – Spectromètre de masse

1 - On raisonne sur l'énergie mécanique, qui est conservée car le mouvement est conservatif (seule force prise en compte : la force électrique $q\vec{E}$).

- Au point S : $E_{m,S} = \frac{1}{2}mv_S^2 + qV_S = 0 + qV_S$.

- Au point O : $E_{m,O} = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_O$.

En égalisant les deux on obtient : $\frac{1}{2}mv_0^2 = qV_S - qV_O$. Or $U = V_S - V_O$, donc

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad \text{et} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

2 - En présence d'un seul champ magnétique, la force qui s'exerce sur la charge est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La puissance de cette force est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ car $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$.

Ainsi d'après le théorème de l'énergie cinétique, E_c reste constante, donc v aussi.

3 - La trajectoire est un cercle comme sur la figure ci-dessous. Il faut choisir un repère polaire.

$$\vec{AM} = R\vec{e}_r, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

On a aussi $\vec{v} = v\vec{e}_\theta$ avec v la composante de la vitesse (pas sa norme), donc $v = R\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$ et on peut remplacer dans l'accélération :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

On sait aussi que $\ddot{\theta} = 0$ car $v = R\dot{\theta}$ est constant.

Calculons ensuite la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_z = qvB\vec{e}_r.$$

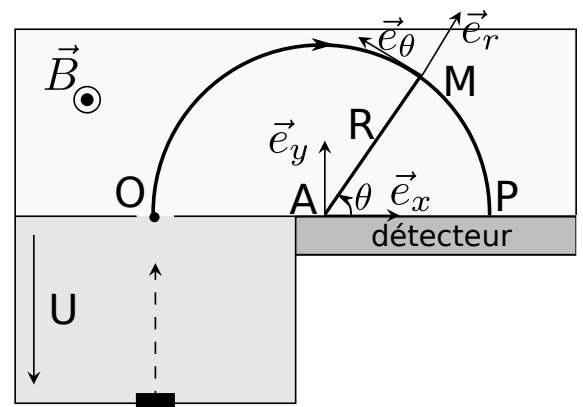
On applique le principe fondamental de la dynamique à la charge (référentiel galiléen) :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{donc} \quad -\frac{mv^2}{R}\vec{e}_r = qvB\vec{e}_r.$$

On en déduit que $\frac{mv}{R} = qB$, donc $R = \frac{mv}{qB}$.

Enfin d'après la question 1 on a l'expression de v :

$$R = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}}, \quad \text{soit} \quad R = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}.$$



4 - On trouve $OP = 2R = 14.4$ cm pour l'hydrogène, et 20.4 cm pour le deutérium, dont la différence est largement mesurable !